UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s3nouvellesannal19pari

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

ΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

52 - 131

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur
et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

X. ANTOMARI,
Docteur ès Sciences, ancien élève de l'École Normale,
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Carnot.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR GERONO, PROUHET, BOURGET, BRISSE ET M. ROUCHÉ.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME XIX.

(LIXe VOLUME DE LA COLLECTION).

502 43
1901

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1900

(Tous droits réservés.)

QA
1
N8
v. 59

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1899.

Résultat.

Après examen des Mémoires adressés à la Rédaction pour le deuxième concours de 1899, le prix a été décerné à MM. Duporcq et Gallucci. Leurs Mémoires paraîtront prochainement.

D'après le Règlement des concours des *Nouvelles Annales*, les avantages attachés à un prix non décerné doivent être reportés au concours suivant. Ce cas s'étant produit pour le premier concours de 1899, les avantages y attachés seront reportés au deuxième et partagés également entre MM. Duporcq et Gallucci.

RÉSUMÉ DES PRINCIPALES FORMULES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES [1].

FONCTIONS DE WEIERSTRASS.

Développements en produits et séries infinis.

$$\sin u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{m\pi}\right) e^{\frac{u}{m\pi}},$$

$$\cot u = \frac{1}{u} - \sum{}' \left(\frac{1}{u - m\pi} + \frac{1}{m\pi}\right),$$

$$\frac{1}{\sin^2 u} = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \frac{1}{(u - m\pi)^2}.$$

$$(w = 2m\omega + 2n\omega'),$$

$$\sigma u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$$

$$\wp u = \frac{1}{u^2} - \sum{}' \left[\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$

$$\frac{1}{2}\wp' u = \sum \frac{1}{(u - w)^3}.$$

[1] Les candidats à l'Agrégation de Mathématiques seront autorisés à se servir, pour les compositions écrites, de ce Tableau qu'ils trouveront à la librairie Gauthier-Villars.

Développements en séries entières.

$$\sigma u = u + \star - \frac{g_2}{2^4.3.5} u^5 - \frac{g_3}{2^3.3.5.7} u^7 - \frac{g_2^2}{2^9.3^2.5.7} u^9 - \ldots,$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \star - \frac{g_2}{2^2.3.5} u^3 - \frac{g_3}{2^2.5.7} u^5 - \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2.7} u^7 - \ldots,$$

$$\mathrm{p} u = \frac{1}{u^2} + \star + \frac{g_2}{2^2.5} u^2 + \frac{g_3}{2^2.7} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2} u^6 + \frac{3 g_2 g_3}{2^4.5.7.11} u^8 + \ldots.$$

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w^6}.$$

Relations entre $\mathrm{p} u$ *et ses dérivées.*

$$\mathrm{p}'^2 u = 4 \mathrm{p}^3 u - g_2 \mathrm{p} u - g_3 = 4(\mathrm{p} u - e_1)(\mathrm{p} u - e_2)(\mathrm{p} u - e_3),$$

$$\mathrm{p}'' u = 6 \mathrm{p}^2 u - \tfrac{1}{2} g_2,$$

$$\mathrm{p}''' u = 12 \mathrm{p} u \mathrm{p}' u.$$

Homogénéité.

$$\sigma(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \mu \sigma(u \mid \omega, \omega'),$$

$$\zeta(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu} \zeta(u \mid \omega, \omega'),$$

$$\mathrm{p}(\mu u \mid \mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu^2} \mathrm{p}(u \mid \omega, \omega').$$

$$g_2(\mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu^4} g_2(\omega, \omega'),$$

$$g_3(\mu\omega, \mu\omega') = \frac{1}{\mu^6} g_3(\omega, \omega').$$

Dégénérescence.

1° $\omega' = \infty$:

$$\mathrm{p} u = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)},$$

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{9 g_3}{2 g_2}, \qquad e_1 = \frac{3 g_3}{g_2}, \qquad e_2 = e_3 = -\frac{3 g_3}{2 g_2};$$

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = 0.$$

$$\zeta u = \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{cotang} \frac{\pi u}{2\omega} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u,$$

$$\sigma u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2} \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2\omega}.$$

2° $\omega = \infty$, $\omega' = \infty$:

$$\wp u = \frac{1}{u^2}, \qquad \zeta u = \frac{1}{u}, \qquad \sigma u = u,$$

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0, \qquad g_2 = 0, \qquad g_3 = 0.$$

Périodicité et formules d'addition.

$$\wp(u + 2\omega) = \wp u,$$
$$\wp(u + 2\omega') = \wp u,$$
$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta u + 2\eta, \qquad \eta = \zeta\omega,$$
$$\zeta(u + 2\omega') = \zeta u + 2\eta', \qquad \eta' = \zeta\omega',$$
$$\sigma(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u,$$
$$\sigma(u + 2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma u,$$
$$\sigma(u + 2m\omega + 2n\omega') = (-1)^{mn+m+n} e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')}\sigma u;$$
$$\eta\omega' - \omega\eta' = \tfrac{1}{2}\pi i,$$

le coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ étant supposé positif.

$$\wp u - \wp v = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v},$$

$$\frac{\wp' u}{\wp u - \wp v} = \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u,$$

$$\frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} = \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v,$$

$$\wp u - \wp(u+v) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right),$$

$$\wp u + \wp v + \wp(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2,$$

$$\wp(u+\omega) - e_1 = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp u - e_1},$$

$$\wp(u+\omega+\omega') - e_2 = \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\wp u - e_2},$$

$$\wp(u+\omega') - e_3 = \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{\wp u - e_3}.$$

Racines e_1, e_2, e_3. — Fonctions σ_1, σ_2, σ_3.

$$e_1 = \wp\omega, \qquad e_2 = \wp(\omega + \omega'), \qquad e_3 = \wp\omega',$$

$$\wp' u = -2\frac{\sigma(u-\omega)\sigma(u-\omega')\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma\omega\sigma\omega'\sigma(\omega+\omega')\sigma^3 u},$$

$$\sigma_1 u = e^{\eta u}\frac{\sigma(\omega - u)}{\sigma\omega},$$

$$\sigma_2 u = e^{(\eta+\eta')u}\frac{\sigma(\omega+\omega'-u)}{\sigma(\omega+\omega')},$$

$$\sigma_3 u = e^{\eta' u}\frac{\sigma(\omega'-u)}{\sigma\omega'};$$

$$\wp u - e_1 = \left(\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right)^2, \qquad \wp u - e_2 = \left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\right)^2, \qquad \wp u - e_3 = \left(\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}\right)^2;$$

$$\wp' u = -\frac{2\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^3 u}.$$

Les fonctions σ_1, σ_2, σ_3 sont paires.

$$\frac{d}{du}\frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u} = \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\lambda u}\frac{\sigma_\nu u}{\sigma_\lambda u}, \qquad \frac{d}{du}\frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u} = -(e_\mu - e_\nu)\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma_\nu u}\frac{\sigma u}{\sigma_\nu u},$$

$$\frac{d}{du}\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u} = -\frac{\sigma_\mu u}{\sigma u}\frac{\sigma_\nu u}{\sigma u}.$$

Valeurs réelles de $\wp u$ quand ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réelles.

Considérons le rectangle de sommets 0, ω, $\omega + \omega'$, ω'. Quand l'argument u décrit le contour de ce rectangle dans le sens 0, ω, $\omega + \omega'$, ω', 0, la fonction $\wp u$ diminue constamment de $+\infty$ à $-\infty$:

1° Quand u va de 0 à ω, $\wp u$ est réel et décroît de ∞ à e_1 ; $\wp' u$ est négatif.

2° Quand u va de ω à $\omega + \omega'$, $\wp u$ décroît de e_1 à e_2, $\wp' u$ est purement imaginaire positive.

3° La variable u allant de $\omega + \omega'$ à ω', $\wp u$ décroît de e_2 à e_3, $\wp' u$ est réelle et positive.

4° Enfin u revenant de ω' à o, pu décroît de e_3 à $-\infty$; $p'u$ est purement imaginaire négative.

En tout point pris dans le rectangle, pu est imaginaire.

FONCTIONS DE JACOBI.

Séries trigonométriques.

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}, \qquad v = \frac{\pi u}{2K},$$

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q}\sin v - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3v + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5v - \ldots,$$

$$H_1(u) = 2\sqrt[4]{q}\cos v + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3v + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5v + \ldots,$$

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos 2v + 2q^4\cos 4v - 2q^9\cos 6v + \ldots,$$

$$\Theta_1(u) = 1 + 2q\cos 2v + 2q^4\cos 4v + 2q^9\cos 6v + \ldots.$$

$\lambda = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}$,	*Zéros de* $H(u)$	$2mK + 2niK'$,
$H_1(u) = H(u+K)$,	» $H_1(u)$	$(2m+1)K + 2niK'$,
$\Theta(u) = \frac{1}{i\lambda}H(u+iK')$,	» $\Theta(u)$	$2mK + (2n+1)iK'$,
$\Theta_1(u) = \frac{1}{\lambda}H(u+K+iK')$,	» $\Theta_1(u)$	$(2m+1)K + (2n+1)iK'$.

Produits infinis.

$$v = \frac{\pi u}{2K}, \qquad A = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots,$$

$$H(u) = A\,2\sqrt[4]{q}\sin v(1 - 2q^2\cos 2v + q^4)(1 - 2q^4\cos 2v + q^8)\ldots;$$

$$H_1(u) = A\,2\sqrt[4]{q}\cos v(1 + 2q^2\cos 2v + q^4)(1 + 2q^4\cos 2v + q^8)\ldots,$$

$$\Theta(u) = A(1 - 2q\cos 2v + q^2)(1 - 2q^3\cos 2v + q^6)\ldots,$$

$$\Theta_1(u) = A(1 + 2q\cos 2v + q^2)(1 + 2q^3\cos 2v + q^6)\ldots.$$

Addition d'une demi-période ou d'une période.

$$\lambda = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}, \qquad \mu = e^{-\frac{i\pi}{K}(u+iK')},$$

$$\begin{aligned}
H(u+K) &= H_1(u), & H(u+iK') &= i\lambda\,\Theta(u),\\
\Theta(u+K) &= \Theta_1(u), & \Theta(u+iK') &= i\lambda\,H(u),\\
H_1(u+K) &= -H(u), & H_1(u+iK') &= \lambda\,\Theta_1(u),\\
\Theta_1(u+K) &= \Theta(u), & \Theta_1(u+iK') &= \lambda\,H_1(u),\\
H(u+K+iK') &= \lambda\,\Theta_1(u), & H(u+2iK') &= -\mu\,H(u),\\
\Theta(u+K+iK') &= \lambda\,H_1(u), & \Theta(u+2iK') &= -\mu\,\Theta(u),\\
H_1(u+K+iK') &= -i\lambda\,\Theta(u), & H_1(u+2iK') &= \mu\,H_1(u),\\
\Theta_1(u+K+iK') &= i\lambda\,H(u), & \Theta_1(u+2iK') &= \mu\,\Theta_1(u).
\end{aligned}$$

Dans tout ce qui suit, nous supposerons K et K′ particularisés de telle façon que

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots.$$

Relations entre les σ et les fonctions de Jacobi.

$$\begin{aligned}
\sigma(u|K, iK') &= \frac{H(u)}{H'(0)}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{K}u^2},\\
\sigma_1(u|K, iK') &= \frac{\sigma(K+u)}{\sigma K}\,e^{-\eta u} = \frac{H_1(u)}{H_1(0)}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{K}u^2},\\
\sigma_2(u|K, iK') &= \frac{\sigma(K+iK'+u)}{\sigma(K+iK')}\,e^{-(\eta+\eta')u} = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta_1(0)}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{K}u^2},\\
\sigma_3(u|K, iK') &= \frac{\sigma(iK'+u)}{\sigma iK'}\,e^{-\eta' u} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{K}u^2}.
\end{aligned}$$

Ces formules donnent les fonctions σ construites avec les périodes spéciales K et iK'. D'après les formules d'homogénéité, les fonctions σ construites avec deux périodes ω et ω′, assujetties à la seule condition

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{iK'}{K},$$

s'obtiennent immédiatement :

$$\sigma(u|\omega, \omega') = \frac{\omega}{K}\,\frac{H\left(\frac{K}{\omega}u\right)}{H'(0)}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}.$$

$$\sigma_1(u|\omega, \omega') = \frac{H_1\left(\frac{K}{\omega}u\right)}{H_1(0)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_2(u|\omega, \omega') = \frac{\Theta_1\left(\frac{K}{\omega}u\right)}{\Theta_1(0)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_3(u|\omega, \omega') = \frac{\Theta\left(\frac{K}{\omega}u\right)}{\Theta(0)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}.$$

FONCTIONS $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \qquad \sqrt{k} = \frac{H(K)}{\Theta(K)} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}.$$

Addition d'une demi-période ou d'une période.

$$\operatorname{sn}(u + K) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{sn}(u + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u + K) = -\frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{cn}(u + iK') = -i\frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{dn}(u + K) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{dn}(u + iK') = -i\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{sn}(u + K + iK') = \frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u + K + iK') = \frac{-ik'}{k \operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{dn}(u + K + iK') = ik'\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{sn}(u + 2K) = -\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{sn}(u + 2iK') = \operatorname{sn} u,$$

$$\operatorname{cn}(u + 2K) = -\operatorname{cn} u, \qquad \operatorname{cn}(u + 2iK') = -\operatorname{cn} u,$$

$$\operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u, \qquad \operatorname{dn}(u + 2iK') = -\operatorname{dn} u.$$

Argument purement imaginaire.
Relation entre pu *et* $\operatorname{sn} u$.

$$\operatorname{sn}(iu \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}') = i\frac{\operatorname{sn}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K})}{\operatorname{cn}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K})}, \qquad p(u \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}') = -\frac{1+k^2}{3} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u};$$

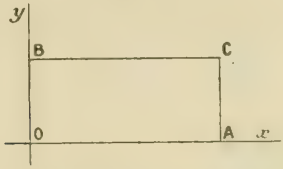
$$\operatorname{cn}(iu \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}') = \frac{1}{\operatorname{cn}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K})}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} p(u \mid \omega, \omega') = e_3 + \dfrac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(u\sqrt{e_1 - e_3})}; \\ \omega\sqrt{e_1 - e_3} = \mathrm{K}, \quad \omega'\sqrt{e_1 - e_3} = i\mathrm{K}'. \end{array} \right.$$

$$\operatorname{dn}(iu \mid \mathrm{K}, i\mathrm{K}') = \frac{\operatorname{dn}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K})}{\operatorname{cn}(u \mid \mathrm{K}', i\mathrm{K})},$$

Valeurs réelles de $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ *quand* K *et* K′ *sont réels.*

$$\mathrm{OA} = \mathrm{K}, \qquad \mathrm{OB} = \mathrm{K}' \text{ (\textit{fig.} 1)},$$

Fig. 1.



u	O	A	C	B
$\operatorname{sn} u$	0	1	$\frac{1}{k}$	∞

u	A	O	B
$\operatorname{cn} u$	0	1	∞

u	C	A	O	B
$\operatorname{dn} u$	0	k'	1	∞

Formules d'addition.

$$\operatorname{cn}\alpha = \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u - \alpha) + \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{dn}\alpha.$$

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \qquad k^2 + k'^2 = 1,$$
$$k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1,$$

$$\operatorname{sn}(u + v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

Dérivées.

Si l'on suppose, comme dans ce qui précède, K et K′ liées par la condition

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$$

on a

$$\frac{d(\operatorname{sn} u)}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d(\operatorname{cn} u)}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d(\operatorname{dn} u)}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

Développements en séries entières.

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right),$$

$$\operatorname{sn} u = u - 2k\alpha \frac{u^3}{1.2.3} + 4k^2(\alpha^2 + 3)\frac{u^5}{1.2.3.4.5}$$
$$- 8k^3(\alpha^3 + 33\alpha)\frac{u^7}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots,$$

$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{u^2}{1.2} + (1 + 4k^2)\frac{u^4}{1.2.3.4} - (1 + 44k^2 + 16k^4)\frac{u^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - k^2 \frac{u^2}{1.2} + k^2(4 + k^2)\frac{u^4}{1.2.3.4}$$
$$- k^2(16 + 44k^2 + k^4)\frac{u^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots.$$

Autre notation. Fonctions ϑ.

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}, \qquad q = e^{\tau\pi i}.$$

$$\vartheta_1(v|\tau) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin v\pi - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3v\pi + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5v\pi \quad \ldots.$$

$$\vartheta_2(v|\tau) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos v\pi - 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3v\pi + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5v\pi \quad \ldots$$

$$\vartheta_3(v|\tau) = 1 + 2q\cos 2v\pi + 2q^4\cos 4v\pi + 2q^9\cos 6v\pi + \ldots,$$
$$\vartheta_0(v|\tau) = 1 - 2q\cos 2v\pi + 2q^4\cos 4v\pi - 2q^9\cos 6v\pi + \ldots.$$

$$\vartheta_0(v+\tfrac{1}{2}) = \vartheta_3(v), \qquad \vartheta_1(v+\tfrac{1}{2}) = \vartheta_2(v),$$
$$\vartheta_2(v+\tfrac{1}{2}) = -\vartheta_1(v), \quad \vartheta_3(v+\tfrac{1}{2}) = \vartheta_0(v).$$

$$\vartheta_0(v+\tfrac{1}{2}\tau) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_1(v), \quad \vartheta_1(v+\tfrac{1}{2}\tau) = iq^{\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_0(v),$$
$$\vartheta_2(v+\tfrac{1}{2}\tau) = q^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_3(v), \quad \vartheta_3(v+\tfrac{1}{2}\tau) = q^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_2(v).$$

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma(u) = 2\omega\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)},$$
$$e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma_1(u) = \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)}, \qquad v = \frac{u}{2\omega},$$
$$e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma_2(u) = \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)},$$
$$e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma_3(u) = \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0(0)}.$$

[O2b]

PROBLÈMES DIVERS SUR LA MÉTHODE INVERSE DES TANGENTES [1];

PAR M. ED. COLLIGNON.

PROBLÈME DÉRIVÉ DE CELUI DE M. DE BEAUNE.

On donne un axe fixe OX. On demande de trouver une courbe AB telle que, si l'on mène au point M la tangente MR jusqu'au point R où elle rencontre l'axe, puis par le point R une droite RN, faisant avec RM un angle donné α, le point N, où la droite RN coupe la normale MN à la courbe, appartienne à une droite donnée OH, faisant l'angle β avec l'axe OX. En d'autres termes, le segment MN compris sur la normale entre la

[1] *Voir* p. 488.

courbe et la droite OH, doit être vu du pied de la tangente R sous un angle α donné constant.

On peut prendre pour origine le point O où la droite donnée rencontre l'axe OX. Le cas où la droite serait parallèle sera examiné à part. Nous prendrons pour axe des y la perpendiculaire OY menée à OX par le point O.

Pour abréger l'écriture nous poserons $m = \tang\alpha$ et $b = \tang\beta$. Nous avons, par conséquent,

$$MN = RM \times m.$$

Soient $x = OP$, $y = PM$ les coordonnées du point M de la courbe,

$$x' = OP', \qquad y' = P'N$$

les coordonnées du point N, commun à la normale et à la droite OH.

Menons par le point M la droite ML parallèle à OX, jusqu'à la rencontre de NP'. Les deux triangles MLN, RPM sont semblables et donnent les égalités

$$\frac{LN}{RP} = \frac{LM}{PM} = \frac{MN}{RM} = m.$$

Observons de plus que RP est la sous-tangente de la courbe égale à $\frac{y\,dx}{dy}$. Il vient donc

$$LN = RP \times m = my\frac{dx}{dy},$$

$$LM = PM \times m = my,$$

et, par conséquent,

$$x' = OP' = OP - LM = x - my,$$

$$y' = P'N = PM + LN = y + my\frac{dx}{dy}.$$

La condition imposée au point $N(x', y')$ s'exprime par la relation $y' = bx'$, équation de la droite OH; ce

qui conduit à l'équation différentielle

$$y + my\frac{dx}{dy} = b(x - my),$$

ou bien, en divisant par y,

$$(1) \qquad 1 + m\frac{dx}{dy} = b\left(\frac{x}{y} - m\right).$$

Cette équation rentre dans le type des équations homogènes, et les variables se séparent si l'on prend pour variable le rapport $\frac{x}{y}$ des deux coordonnées. Posons $\frac{x}{y} = t$; il viendra, en chassant x et dx,

$$1 + m\left(t + \frac{y\,dt}{dy}\right) = b(t - m).$$

On résoudra cette équation par rapport à $\frac{dy}{y}$; il vient

$$\frac{dy}{y} = \frac{m\,dt}{(b-m)t - (bm+1)} = \frac{m}{b-m}\left[\frac{dt}{t - \frac{1+bm}{m-b}}\right].$$

Mais $m = \operatorname{tang}\alpha$, $b = \operatorname{tang}\beta$; donc

$$\frac{1+bm}{b-m} = \frac{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\beta - \operatorname{tang}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tang}(\beta-\alpha)} = \cot(\beta-\alpha);$$

et nous ferons $\mu = \cot(\beta - \alpha) = \frac{1+bm}{b-m}$, pour simplifier la notation. Nous aurons donc

$$(2) \qquad \frac{dy}{y} = \frac{m}{b-m}\left(\frac{dt}{t-\mu}\right),$$

équation dont l'intégrale générale est

$$(3) \qquad y = C(t-\mu)^{\frac{m}{b-m}},$$

avec une constante arbitraire C.

Le cas de $b = m$ doit être traité à part; on a alors $\beta = \alpha$, et $\cot(\beta - \alpha)$ a une valeur infinie. L'équation

$$1 + m\left(t + \frac{y\,dt}{dy}\right) = b(t - m)$$

perd son terme en t et se réduit à la forme

$$(2\ bis) \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{m\,dt}{1 + mb} = -\frac{m}{1 + m^2}\,dt,$$

d'où résulte l'équation intégrale

$$(3\ bis) \qquad y = Ce^{-\frac{m}{1+m^2}t}.$$

Si dans l'équation (3), qui correspond à la non-égalité de m et de b, on remplace t par $\frac{x}{y}$, il vient pour l'équation de la courbe cherchée

$$(4) \qquad y^{\frac{b}{b-m}} = C(x - \mu y)^{\frac{m}{b-m}}.$$

La même opération appliquée à l'équation (3 *bis*) conduit à l'équation

$$(4\ bis) \qquad x = -\frac{1 + m^2}{m}\,y\,l\left(\frac{y}{C}\right).$$

Les deux équations (4) et (4 *bis*) donnent la solution dans tous les cas possibles, sauf celui où la droite OH est parallèle à OX. Mais pour la discussion du problème, il convient d'examiner plusieurs cas, suivant que l'on a $b < m$ ou $b > m$, et suivant que m est positif ou négatif. Quant à b, on peut toujours le supposer positif.

Discussion de la solution.

Premier cas : b et m positifs. — Ce cas se subdivise en deux, suivant que b est plus petit que m ou que b est plus grand.

1° $b < m$.

L'équation (4) devient, en prenant positivement les exposants dans les deux membres,

$$(x - \mu y)^{\frac{m}{m-b}} = C y^{\frac{b}{m-b}}.$$

Le nombre μ est négatif, car on a toujours $\mu = \frac{1 + bm}{b - m}$; nous poserons donc $\mu = -\mu'$, et l'équation deviendra, en posant $\frac{m}{m-b} = n$,

$$(x + \mu' y)^n = C y^{n-1}.$$

Lorsque n est entier, la courbe est une courbe algébrique du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Le signe de m dépend du sens dans lequel on porte le segment MN sur la normale à la courbe; ce sens doit être choisi dans chaque cas particulier de manière à justifier les formules de transformation dont on a fait usage, savoir

$$x' = x - my,$$

$$y' = y + m\frac{y\,dx}{dy}.$$

2° $b > m$.

L'équation (4) conserve sa forme primitive, μ est positif, et si l'on fait $\frac{m}{b-m} = n$, elle devient

$$y^{n+1} = C(x - \mu y)^n.$$

Si n est entier, elle est du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre.

Second cas : b positif, m négatif. — Alors $b - m$ est toujours positif. Faisons $m = -m'$, en mettant le signe en évidence. L'équation (4) deviendra

$$y^{\frac{b}{b+m'}} = C(x - \mu y)^{-\frac{m'}{b+m'}},$$

ou bien, en ramenant les exposants à une valeur positive,

$$y^{\frac{b}{b+m'}} \times (x - \mu y)^{\frac{m'}{b+m'}} = C.$$

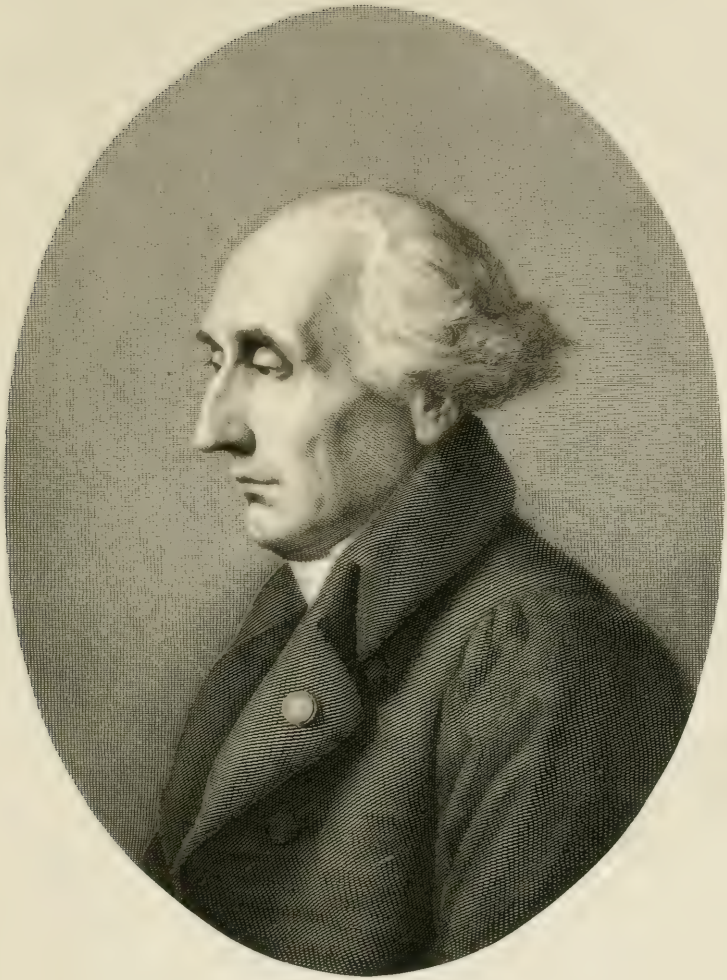
Dans ce cas $\mu = \frac{1 + mb}{b - m} = \frac{1 - bm'}{b + m'}$ peut être positif, nul ou négatif, suivant que bm' est moindre que l'unité, égal à l'unité, ou plus grand que l'unité. Faisons $\frac{b + m'}{m'} = n$, ce qui entraîne $\frac{b + m'}{b} = \frac{n}{n - 1}$. L'équation devient

$$y^{\frac{n-1}{n}} \times (x - \mu y)^{\frac{1}{n}} = C,$$

et en élevant les deux membres de cette équation à la puissance dont l'exposant est n, il vient en définitive

$$y^{n-1} \times (x - \mu y) = C^n.$$

Nous résumerons les divers cas que nous venons d'indiquer dans le Tableau suivant :



Désignation des cas, d'après le signe de m.	Relation de grandeur entre m et b.	Signe du facteur μ : $\mu = \frac{1+bm}{b-m}$.	Forme de l'équation finale.
PREMIER CAS : m positif.	$b < m$.	μ négatif, égal à $-\mu'$. $n = \frac{m}{m-b}$.	$(x+\mu' y)^n = \mathrm{C} y^{n-1}$.
	$b = m$.	»	$x = -\frac{1+m^2}{m} y l\left(\frac{y}{\mathrm{C}}\right)$.
	$b > m$.	μ positif. $n = \frac{m}{b-m}$.	$\mathrm{C}(x-\mu y)^n = y^{n+1}$.
SECOND CAS : m négatif et égal à $-m'$.	$b > m$. $\frac{b+m'}{m'} = n$.	$\mu = \frac{1-bm'}{b+m'}$.	
		$bm' < 1$, μ positif,	$y^{n-1}(x-\mu y) = \mathrm{C}^n$.
		$bm' = 1$, $\mu = 0$.	$y^{n-1} x = \mathrm{C}^n$.
		$bm' > 1$, μ négatif, égal à $-\mu'$.	$y^{n-1}(x+\mu' y) = \mathrm{C}^n$.

La constante C qui figure dans ces équations est partout homogène à une longueur. On peut la faire égale à zéro, sauf dans le cas de $b = m$. On obtient alors pour solution une droite quelconque passant par l'origine. Si l'on prend la droite

$$y = x \operatorname{tang}(\beta - \alpha),$$

on voit qu'elle satisfait à toutes les conditions en y associant la droite

$$y' = x' \operatorname{tang} \beta,$$

qui fait l'angle α avec la première.

Parmi toutes les courbes qui sont comprises dans le Tableau précédent, il peut y avoir des courbes du second ordre. On en obtient :

1° En faisant $n = 2$, pour m positif et plus grand que b;

2° En faisant $n = 1$, avec m positif et moindre que b;

3° En faisant $n = 2$, pour m négatif.

On obtient, en effet, d'après ces hypothèses, les équations :

$$(x - \mu' y)^2 = Cy,$$

qui représente une parabole;

$$C(x - \mu y) = y^2,$$

qui en représente une autre; et

$$y(x \mp \mu y) = C^2,$$

qui représente des hyperboles.

Les paraboles passent par l'origine, au point de rencontre de l'axe OX et de la droite $y' = bx'$.

Si l'on cherche à appliquer cette théorie à une parabole quelconque passant par l'origine, on n'est pas certain d'avance que cette parabole possédera réellement la propriété indiquée. Pour qu'il en soit ainsi, il faut

que les valeurs de m et b soient réelles; autrement il n'existerait pas de droite réelle satisfaisant à la condition imposée. Prenons, par exemple, la parabole

$$(x + \mu' y)^2 = Cy.$$

Nous devons déterminer m et b par les relations

$$\frac{m}{m - b} = n = 2,$$

$$\frac{1 + bm}{m - b} = \mu'.$$

On tire de la première

$$b = \tfrac{1}{2} m,$$

et la seconde devient

$$m + \frac{2}{m} = \mu'$$

ou bien

$$m^2 - \mu' m + 2 = 0.$$

On a donc pour m

$$m = \frac{\mu'}{2} \pm \sqrt{\frac{\mu'^2}{4} - 2}.$$

Le nombre m ne sera réel qu'autant qu'on aura

$$\mu'^2 > 8,$$

et la moindre valeur admissible pour μ' est égale à $2\sqrt{2}$; à cette valeur limite correspondent les valeurs

$$m = \sqrt{2}, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qui donne pour les angles α et β

$$\alpha = 54^\circ 44', \qquad \beta = 35^\circ 16'$$

environ. Les deux angles sont complémentaires, puisque le produit des tangentes est égal à l'unité.

La parabole

$$C(x - \mu y) = y^2$$

correspond aux valeurs de m et b déduites des équations

$$\frac{m}{b - m} = n = 2,$$

$$\frac{1 + mb}{b - m} = \mu.$$

De la première on tire $b = \frac{3}{2}m$, et substituant cette valeur dans la seconde, il vient

$$3m^2 - \mu m + 2 = 0,$$

ce qui donne

$$m = \frac{\mu}{6} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{36} - \frac{2}{3}} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 24}}{6}.$$

La propriété n'est donc réelle pour la parabole que si μ est au moins égal à $2\sqrt{6}$.

A la valeur limite

$$\mu = 2\sqrt{6},$$

correspondent pour m et b les valeurs

$$m = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

et l'on a encore

$$mb = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{2}} = 1,$$

de sorte que les valeurs limites des angles α et β sont encore complémentaires. On a, pour $m = \sqrt{\frac{2}{3}}$,

$$\alpha = 39^\circ 14',$$

et pour $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$,

$$\beta = 50^\circ 46'$$

environ.

Lorsqu'on examine de même les hyperboles représentées par l'équation générale

$$y(x \mp py) = C^2,$$

on a, puisque m est négatif et égal à $-m'$,

$$\frac{b+m'}{m'} = n = 2,$$

$$\frac{1-bm'}{b+m'} = \mu.$$

On tire de la première

$$b = m',$$

et la seconde devient

$$m'^2 + 2\mu m' - 1 = 0,$$

ce qui donne pour m'

$$m' = -\mu \pm \sqrt{\mu^2+1}.$$

Il faut que m' soit réel et positif. La réalité de m est assurée quelle que soit la valeur de μ. Mais la valeur positive exige qu'on prenne le signe supérieur du radical et qu'on pose

$$m' = -\mu + \sqrt{\mu^2+1}.$$

La même formule donne b, puisque $b = m'$.

Pour $\mu = 0$, $m' = 1$, et la courbe devient l'hyperbole $xy = C^2$, rapportée à ces asymptotes. La droite $y' = bx'$ est alors la bissectrice $y = x$ de l'angle des axes. Il est aisé de vérifier géométriquement la propriété de la courbe.

Propriété générale des courbes étudiées.

Si on laisse de côté la constante C, l'équation de la courbe, sauf le cas de $b = m$, ne dépend que des exposants $\frac{m}{m-b}$ ou $\frac{b+m'}{m'}$ et du coefficient μ. Les expo-

sants ne sont pas altérés si l'on multiplie les nombres m et b par un même nombre λ; mais le coefficient μ subit de ce fait une certaine modification et passe généralement de la valeur

$$\frac{1+mb}{m-b} \quad \text{à la valeur} \quad \frac{1+mb\lambda^2}{\lambda(m-b)}.$$

Toutefois, il conserve sa valeur si l'on a identiquement

$$\frac{1+mb}{m-b} = \frac{1+mb\lambda^2}{\lambda(m-b)},$$

c'est-à-dire si le facteur λ satisfait à l'équation du second degré

$$\lambda^2 - \left(\frac{1}{mb}+1\right)\lambda + \frac{1}{mb} = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{1}{mb}.$$

La première laisse subsister sans altération les coefficients m et b. Mais la seconde montre que l'équation de la courbe reste la même si l'on substitue aux rapports

$$m \quad \text{et} \quad b$$

les rapports

$$m\lambda = \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad l\lambda = \frac{1}{m};$$

ce qui revient à remplacer les angles

$$\alpha \quad \text{et} \quad \beta$$

par les angles

$$\frac{\pi}{2} - \beta \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

c'est-à-dire par les angles complémentaires alternés.

Dans les cas limites signalés plus haut, les angles α et β étant complémentaires, la substitution de $\frac{\pi}{2} - \beta$

à α laisse α tel qu'il est, et β est de même conservé; de sorte que les nombres m et b ne peuvent subir aucune altération sans changement de la courbe.

Cas du parallélisme des droites OX, OH.

Il reste un cas à examiner : celui où la droite donnée est parallèle à la droite OX. Le problème est alors plus simple, car il suffit d'égaler l'ordonnée y' à une constante h. L'équation différentielle devient

$$y + my\frac{dx}{dy} = h,$$

et l'intégrale générale est

$$mx = hl\left(\frac{y}{C}\right) - y.$$

C'est l'équation de la courbe de M. de Beaune généralisée, rapportée à l'asymptote et à un axe perpendiculaire.

On voit que le problème est très général et comprend comme solution des courbes d'ordres et d'espèces très différentes, les unes algébriques, les autres transcendantes; celles-ci sont de la forme

$$x - \frac{1+m^2}{m}\,yl\left(\frac{y}{C}\right) = 0$$

ou de la forme

$$mx = hl\left(\frac{y}{C}\right) - y.$$

Toutes ces courbes peuvent être regardées comme engendrées par le sommet M d'un angle droit RMN, appartenant à un triangle rectangle formé par la tangente MR, la normale MN et la droite RN qui joint le pied R de la tangente à l'intersection N de la normale avec la droite fixe OH. Si l'on fait suivre la courbe au

point M, le triangle, dont les deux autres sommets décrivent, l'un l'axe OX, l'autre la droite OH, se déplace en se déformant, mais en conservant sa similitude, puisque l'angle MRN $= \alpha$ et l'angle droit RMN restent constants tous deux. De plus, le côté RM reste tangent à la courbe. Imaginons la circonférence circonscrite au triangle mobile. Son centre sera le milieu I de l'hypoténuse RN. Considérons deux positions infiniment voisines du point M et du triangle RMN qui y est attaché. Quand ce triangle passe dans la position infiniment voisine R'M'N', le point I passe en I', la figure tourne de l'angle formé par les tangentes RM, RM', c'est-à-dire de l'angle de contingence de la courbe; enfin les dimensions linéaires du triangle sont réduites dans le rapport des diamètres RM, R'N' des deux cercles circonscrits. On passe donc de la première position à la seconde : 1° par une translation II'; 2° par une rotation autour de I égale à l'angle $d\omega$ de contingence; 3° par une dilatation ou une contraction mesurée par le rapport de deux droites homologues prises dans chaque figure :

$$\frac{R'N'}{RN} = \frac{R'M'}{RM} = \frac{M'N'}{MN}.$$

Les coordonnées x_1, y_1 du centre I du cercle mobile sont données par les équations

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{y\,dx}{dy} + x'\right) \\ &= x - \frac{y}{2}\left(m + \frac{dx}{dy}\right) = x\left(1 - \frac{b}{2m}\right) - y\left(m - \frac{1}{m} - b\right), \\ y_1 &= \frac{1}{2}y\left(1 + m\frac{dx}{dy}\right) = \frac{1}{2}(bx - my). \end{aligned}$$

Si de ces relations on tire x et y en fonction de x_1, y_1, et qu'on substitue dans l'équation de la courbe, on aura comme équation finale en x_1 et y_1 l'équation du

lieu du point I. Une fois ce lieu tracé, le lieu du point M, c'est-à-dire la courbe (x, y), s'en déduirait aisément : par chaque point I faisons passer la droite RN qui, dans l'angle HOX, est divisée au point I en deux parties égales. Cette droite construite, on fera sur RN un triangle rectangle en M, et ayant l'angle α en R. Le sommet M de l'angle droit sera le point correspondant de la courbe.

[A3a]

THÉORÈME SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. P. SONDAT.

Si l'équation

$$(1)\quad \varphi(x) = ax^n - nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}cx^{n-2} - \ldots + nkx - l = 0$$

de degré impair, *a* $\frac{n+1}{2}$ *racines égales, on a, pour cette racine multiple,*

$$\rho = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

Δ, Δ_1 *et* Δ_2 *étant des fonctions homogènes et du second degré des coefficients* $a, b, c, \ldots, h, k, l$.

Appelons $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}, a$, les dérivées successives de φ, divisées respectivement par n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$, ..., et soit

$$\psi(x) = bx^{n-1} - (n-1)cx^{n-2} + \ldots - (n-1)kx + l.$$

Dans φ_1 et ψ, remplaçons les puissances décroissantes

de x par $k, h, \ldots, c, b, a$ et ensuite par $l, k, h, \ldots, c, b$, ou posons

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta = ak - (n-1)bh + \ldots - (n-1)hb + ka, \\ \Delta_1 = al - (n-1)bk + \ldots - (n-1)hc + kb, \\ \Delta_2 = bl - (n-1)ck + \ldots - (n-1)kc + lb. \end{cases}$$

Dans ces fonctions homogènes, remplaçons

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h, \quad k, \quad l$$

par

$$a, \quad \varphi_{n-1}, \quad \varphi_{n-2}, \quad \ldots, \quad \varphi_2, \quad \varphi_1, \quad \varphi,$$

et appelons Δ', Δ'_1, Δ'_2 les résultats des substitutions. Nous aurons

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta' = a\varphi_1 - (n-1)\varphi_2\varphi_{n-1} + \ldots - (n-1)\varphi_2\varphi_{n-1} + a\varphi_1, \\ \Delta'_1 = a\varphi - (n-1)\varphi_1\varphi_{n-1} + \ldots - (n-1)\varphi_2\varphi_{n-2} + \varphi_1\varphi_{n-1}, \\ \Delta'_2 = \varphi\varphi_{n-1} - (n-1)\varphi_1\varphi_{n-2} + \ldots - (n-1)\varphi_1\varphi_{n-2} + \varphi\varphi_{n-1}. \end{cases}$$

Or $\frac{d\Delta'}{dx} = 0$, donc Δ' est indépendant de x.

De plus

$$(4)\qquad \Delta' = \Delta,$$

car en faisant $x = 0$, on rend les termes de Δ' égaux à ceux de Δ [1].

On trouve aussi

$$\frac{d\Delta'_1}{dx} = \Delta,$$

d'où

$$\Delta'_1 = \Delta x + c,$$

et, en faisant $x = 0$, $-\Delta_1 = c$. Donc

$$(5)\qquad \Delta'_1 = \Delta x - \Delta_1.$$

---

[1] *Voir* un théorème analogue, *N. A.*, p. 169; 1897.

En procédant de même, on aura

$$\frac{d\Delta'_2}{dx} = 2\Delta'_1 = 2\Delta x - 2\Delta_1,$$

$$(6) \qquad \Delta'_2 = \Delta x^2 - 2\Delta_1 x + \Delta_2.$$

Cela posé, si l'équation (1) a $\frac{n+1}{2}$ racines égales, en attribuant à x la valeur, soit ρ, de cette racine multiple, annulant φ, φ_1, ..., $\varphi_{\frac{n-1}{2}}$ et, par suite, Δ'_1 et Δ'_2, on aura, pour la déterminer, les deux équations

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\rho - \Delta_1 = 0, \\ \Delta\rho^2 - 2\Delta_1\rho + \Delta_2 = 0, \end{array} \right.$$

d'où

$$(8) \qquad \rho = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

et, par suite,

$$\Delta_1^2 - \Delta\Delta_2 = 0,$$

pour l'une des conditions de multiplicité.

Remarques. — I. Si ρ était une racine multiple de l'ordre $\frac{n+3}{2}$, annulant Δ', Δ'_1, Δ'_2, les équations (7), devenant identiques, la laisseraient indéterminée, mais l'équation $\varphi_2 = 0$, traitée de la même manière, la ferait connaître, et l'on aurait alors les trois conditions simples de multiplicité

$$\Delta = 0, \qquad \Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = 0.$$

II. Avec $n = 2\nu$ pair, si l'équation (1) avait $\nu + 1$ racines égales, chacune des équations $\varphi_1 = 0$, $\psi = 0$, de degré impair, en aurait ν, car

$$\varphi = x\varphi_1 - \psi,$$

et le théorème leur serait applicable.

Donc, *quand une équation algébrique, de degré quelconque, a plus de la moitié de ses racines égales, la racine multiple doit affecter la forme* (8).

Applications. — I. Si $n = 3$, on a, pour une racine *double,*

$$(9) \qquad \rho = \frac{bc - ad}{2(b^2 - ac)} = \frac{2(c^2 - bd)}{bc - ad}.$$

II. Si $n = 5$, on a, pour une racine *triple,*

$$(10) \qquad \rho = \frac{2cd - 3be + af}{2(3c^2 - 4bd + ae)} = \frac{2(3d^2 - 4ce + bf)}{2cd - 3be + af},$$

et les trois trinomes seraient nuls avec une racine *quadruple,* donnée par (9).

III. Si $n = 6$, une racine *quintuple* est donnée par (9), une racine *quadruple* par (10) et entraîne alors la condition

$$10d^2 - 15ce + 6bf - ag = 0.$$

[Q1b]

LES SÉRIES DANS LA PANGÉOMÉTRIE;

PAR M. M. EFIMOV.

Dans son *Précis de Géométrie ou Pangéométrie,* Lobatchefsky emploie les relations

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x},$$

$$\sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

$$\cos \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Puis en remplaçant, dans un triangle dont les côtés

sont infiniment petits, ces expressions par leurs valeurs approchées

$$\sin \Pi(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2,$$

$$\cos \Pi(x) = x - \frac{1}{3} x^3 = x,$$

$$\operatorname{tang} \Pi(x) = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{6} x^2\right) = \frac{1}{x},$$

il trouve les théorèmes de la géométrie non-euclidienne.

On peut montrer que l'équation

$$\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(c)$$

embrasse aussi le théorème de Pythagore. En effet, en substituant les valeurs approchées, on aura

$$\left(2 - \frac{a^2}{2}\right)\left(1 - \frac{b^2}{2}\right) = 1 - \frac{c^2}{2}.$$

Ensuite, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au second, particulièrement dans un triangle presque isoscèle, il vient

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

De la même manière, la relation de Lagrange entre triangles sphérique et rectiligne, dans lesquels les côtés sont égaux, mais les angles différents, permet de déduire la formule fondamentale de la pangéométrie pour la résolution des triangles obliquangles.

En remplaçant, dans la formule du triangle sphérique

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

les valeurs des côtés par leurs développements en séries trigonométriques, on a

$$1 - \frac{c^2}{2} = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)\left(1 - \frac{b^2}{2}\right) + ab\left(1 - \frac{a^2 + b^2}{6}\right) \cos C.$$

Il en résulte

$$\sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\sin\Pi(b) + \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\left(1 - \frac{a^2+b^2}{6}\right)\cos C.$$

Puis, dans tout triangle rectiligne,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C';$$

et quand l'angle C′ s'approche de $\frac{\pi}{2}$, alors son cosinus tend vers zéro; par suite

$$1 - \frac{a^2+b^2}{6} = 1 - \frac{c^2}{6}.$$

Mais

$$\operatorname{tang}\Pi(c) = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{1}{6}c^2\right),$$

ce qu'on déduit aussi immédiatement de

$$\frac{\sin\Pi(c)}{\cos\Pi(c)} = \frac{1 - \frac{1}{2}c^2}{c - \frac{1}{3}c^3}.$$

Par conséquent

$$\operatorname{tang}\Pi(c) = \frac{1}{\cos\Pi(c)}\left(1 - \frac{1}{6}c^2\right),$$

d'où

$$1 - \frac{1}{6}c^2 = \sin\Pi(c).$$

On détermine enfin

$$\sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\sin\Pi(b) + \sin\Pi(c)\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C.$$

d'où, en divisant par le premier terme,

$$1 - \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos C = \frac{\sin\Pi(a)\sin\Pi(b)}{\sin\Pi(c)}.$$

Il est évident que les valeurs approchées, actuellement enseignées, sont les deux premiers termes des séries suivantes

$$\sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4!} - \frac{61x^6}{6!} + \frac{1385x^8}{8!} - \frac{50521x^{10}}{10!} - \ldots$$

Dans l'autre cas,

$$\sin \Pi(x) = \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = 1 - \frac{1}{3}\frac{x^2}{2} + \frac{7}{15}\frac{x^4}{4!} - \frac{31}{21}\frac{x^6}{6!} + \frac{381}{15}\frac{x^8}{8!} - \ldots$$

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1899. — COMPOSITIONS.

Clermont.

CERTIFICAT D'ANALYSE.

Trouver les courbes telles que le rayon de courbure en un point M *de la courbe soit une fonction donnée du rayon vecteur* OM *de ce point,* O *est un point fixe. Traiter complètement le cas où le rayon de courbure est proportionnel à* OM.

Lorsque la distance OP *du point* O *à la tangente en* M *est proportionnelle à une puissance de* OM, *il en est de même du rayon de courbure; trouver l'équation de ces courbes sous forme finie.*

Épreuve pratique. — *Calculer les deux intégrales*

$$\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx,$$

$$\int_0^1 e^x x^2(1-x)^2\,dx.$$

En déduire une valeur approchée du nombre, base des logarithmes népériens; limite supérieure de l'erreur commise.

Certificat de Mécanique.

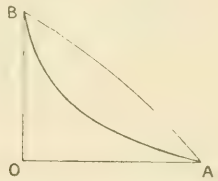
I. *Un point mobile sur une parabole est soumis à l'action d'une force, fonction de la distance, passant par le foyer. Trouver la loi de la force pour que cette parabole soit une courbe brachistochrone.*

Étudier le mouvement et calculer la réaction.

II. *Dans le mouvement d'un plan sur un plan une droite du plan mobile passe par un point fixe* O, *la base est un cercle passant par* O.

Trouver la roulette et construire à chaque instant le cercle des inflexions.

Épreuve pratique. — *Une aire plane homogène est limitée par deux droites rectangulaires* OA, OB *et un arc de cercle* AB *tangent à ces deux droites.*



Trouver en unités C. G. S. :

1° *Les distances du centre de gravité aux deux droites* OA *et* OB;

2° *Le moment d'inertie de l'aire par rapport à la droite* AB.

Masse totale de l'aire $= 2400$,

$$OA = OB = 180.$$

Grenoble.

Certificat d'Analyse.

On considère la surface définie par l'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2)x - 2a(x^2 + y^2) = 0,$$

et l'on demande de déterminer :

1° *Les lieux des traces des normales à cette surface sur les plans* zOx *et* yOx;

2° *Les lignes de courbure de cette surface.*

On reconnaîtra que cette surface est de deux façons différentes l'enveloppe d'une famille de sphères.

Épreuve pratique. — *Développement de*

$$y = \tfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^m + \tfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{-m},$$

suivant les puissances ascendantes de x, m *étant entier ou fractionnaire. Cercle de convergence.*

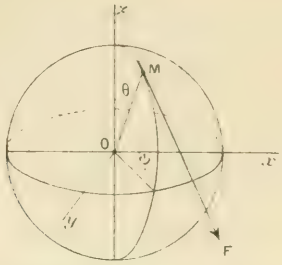
Certificat de Mécanique.

Épreuve écrite. — *Un point matériel* M, *de masse* m, *non pesant, est mobile sans frottement sur la sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

θ *et* ψ *désignant ses coordonnées polaires (colatitude et longitude). Il est soumis à l'action d'une force* F *dirigée constamment suivant la tangente au méridien et que l'on convient de considérer comme*

positive dans le sens où θ croît, comme négative dans le sens opposé.



1° *Démontrer que* F *peut être exprimé par la formule*

$$F = \frac{-mA}{\sin^2\theta}\left(\cot\theta + \frac{d^2\cot\theta}{d\psi^2}\right),$$

où A *est une constante positive ;*

2° *On suppose* F *donné et égal à*

$$-\frac{m\mu\sin^2\psi}{\sin^2\theta}\,(\mu > 0);$$

on demande de déterminer les différentes trajectoires que peut décrire le point h et de montrer que les cônes ayant pour sommet le centre de la sphère et pour directrices ces trajectoires sont tous du quatrième degré.

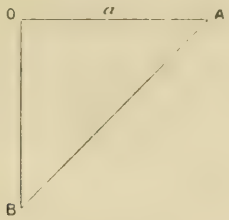
Examiner le cas particulier suivant :

$\psi_0 = 0$; *la vitesse initiale* v_0 *est perpendiculaire à* Oz, *et l'on a :*

$$v_0^2 = \frac{4\mu a}{3\sin 2\theta_0}\left(\theta_0 < \frac{\pi}{2}\right).$$

Épreuve pratique. — *On donne un prisme droit homogène dont la section droite est un triangle rectangle et isoscèle* OAB *de côté a et dont les arêtes ont une longueur h. La densité du prisme est* ρ.

On demande les moments d'inertie du prisme par rapport à ses arêtes et les longueurs des pendules



simples synchrones des pendules composés que l'on obtient en faisant osciller le prisme successivement autour de ces arêtes supposées horizontales.

Lille.

Calcul différentiel et intégral.

1° *Déterminer les pôles de la fonction de u*

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv},$$

où pu est la fonction de Weierstras et où v désigne un argument constant;

2° *Décomposer cette fonction en éléments simples et déterminer son intégrale;*

3° *Démontrer* a priori *que la fonction elliptique du huitième ordre*

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2$$

satisfait à une équation de la forme

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = f(y),$$

où $f(y)$ représente un polynôme du quatrième degré en y; former ce polynôme.

Mécanique rationnelle.

Deux points matériels non pesants M *et* M', *de masses m et m', sont assujettis à se mouvoir, sans frottement, le premier sur un cylindre de révolution, le second sur l'axe de ce cylindre; on demande d'étudier leurs mouvements, sachant qu'ils s'attirent proportionnellement à leur distance.*

On suppose qu'à l'instant initial les deux points sont dans un même plan xOy de section droite du cylindre, et l'on déterminera les vitesses initiales, de manière que le centre de gravité G du système des deux points reste dans le plan xOy, pendant toute la durée du mouvement.

Mécanique appliquée.

Composition écrite. — *Établir les équations de la théorie générale des turbines hydrauliques, et les appliquer à une première étude comparative des diverses dispositions adoptées pour ces moteurs.*

Épreuve pratique. — *On donne, par un croquis coté, une distribution Farcot dont l'une des ailes de la came a pour profil une développante de cercle.*

1° *De quel angle faut-il faire tourner la came pour faire passer l'indice de détente de* $\frac{1}{10}$ *à* $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, ...?

2° *Déterminer par tangentes le profil de la seconde aile de la came de manière à obtenir le même indice de détente des deux côtés du piston, malgré l'obliquité de la bielle du piston.*

Astronomie.

Épreuve théorique. — *Déterminer les éléments de l'orbite d'une planète dont on connaît la position et la*

vitesse initiales (on établira toutes les formules employées).

Étudier comment varient ces éléments lorsque, la grandeur et la direction de la vitesse initiale restant invariables, la position initiale occupe les différents points d'un rayon vecteur issu du Soleil (on laissera de côté les orbites hyperboliques).

Marseille.

Analyse infinitésimale.

On considère la fonction

$$y = a(z-x)^4 - 4ax(z-x)^3 + (6ax^2+b)(z-x)^2 \\ - 2x(2ax^2+b)(z-x) + ax^4 + bx^2 + c,$$

et l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{y}.$$

1° *Intégrer cette équation quand on a*

$$a = 1, \qquad b = 1, \qquad c = 0;$$

2° *En prenant $z - 2x$ pour nouvelle fonction de x, on peut ramener l'intégration de l'équation différentielle aux quadratures. Réduire ces quadratures aux formes les plus simples dans le cas où c n'est pas nul. On considérera spécialement le cas où l'on a*

$$a + b + c = 0:$$

3° *Intégrer l'équation différentielle, dans le cas où l'on a*

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = 1,$$

au moyen d'une série entière en x, s'annulant pour $x = 0$, et convergente dans un cercle ayant pour

centre l'origine. On indiquera seulement la règle de construction de la série, et l'on déterminera une limite du rayon du cercle de convergence.

Posons

$$z - 2x = t,$$

il viendra

$$y = at^3 + bt^2 + c = \mathrm{T},$$

et l'équation générale

$$\frac{dz}{dx} = f(z - 2x)$$

prendra la forme

$$dx = \frac{dt}{f(t) - 2},$$

où les variables sont séparées.

Dans le calcul proposé, on a, par les procédés classiques, pour $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$

$$x = \frac{1}{\sqrt{17}}\left\{\log\left[\frac{t-\alpha}{t+\alpha}\left(\frac{\sqrt{t^2+1}-\beta}{\sqrt{t^2+1}+\beta}\right)^{\frac{\beta}{2}}\right]\right.$$
$$\left. - \frac{2}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{t}{\beta} + \alpha\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t^2+1}}{\alpha}\right\},$$

où l'on a

$$t^4 + t^2 - 4 = (t^2 - \alpha^2)(t^2 + \beta^2).$$

Dans le cas général, on a des intégrales abéliennes de forme classique qui, pour $a + b + c = 0$, se ramènent à l'intégrale elliptique de première espèce.

Enfin, dans le cas où l'on a

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = 1,$$

l'équation différentielle a la forme

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{(z - 2x)^2 + 1}.$$

En appliquant le théorème classique de Briot et Bou-

quet, on peut prendre, par exemple,

$$b = |z| < \tfrac{1}{2}, \qquad a = |x| < \tfrac{1}{4}, \qquad M = \sqrt{2}.$$

et l'on a pour rayon du cercle de convergence d'après Briot et Bouquet

$$a' = a\left(1 - e^{-\frac{2Ma}{b}}\right) = a\left(1 - e^{-\sqrt{2}}\right).$$

Épreuve pratique. — *Ramener à une intégrale simple le calcul de l'aire déterminée par un contour simple fermé sur le paraboloïde dont l'équation est*

$$z = \frac{xy}{a},$$

en coordonnées rectangulaires.

En particulier, faire le calcul dans le cas où l'aire considérée se projette suivant l'une des boucles de la courbe définie sur le plan des xy par l'équation

$$\rho^2 + a^2 = a^2 \sqrt[3]{1 + 2\sin\omega\cos\omega}.$$

Évaluer cette aire à 1^{cmq} *près, en prenant a égal à* 1^{m}.

Quelle est la signification du signe de a?

SOLUTIONS.

$$A = \frac{1}{3a}\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega\left[(a^2 + \rho_1)^{\frac{3}{2}} - (a^2 + \rho_0^2)^{\frac{3}{2}}\right],$$

$$\rho_0 = 0, \qquad (\rho_1^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} = a^3(\sin\omega + \cos\omega),$$

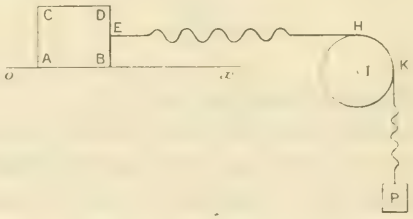
$$A = \frac{a^2(4 - \pi)}{6} = a^2 \times 0{,}1430.$$

Le signe de a est lié à la distribution des plans tangents le long d'une génératrice.

MÉCANIQUE.

Dans un plan vertical, une plaque ABCD *est assujettie à glisser sur une droite horizontale* OX; *la plaque pèse* 10^{kg} *et le coefficient de frottement est égal à* 0,2.

En un point E *de la plaque est attachée l'une des extrémités d'un fil, flexible, inextensible et sans masse, qui va passer sur une poulie pleine et homogène pesant* 10^{kg}, *qui est mobile autour d'un axe horizontal* I.



Le fil s'enroule d'abord sur la poulie sur laquelle il ne peut pas glisser, puis il quitte la poulie et porte à son autre extrémité un poids P *de* 1^{kg}.

Primitivement les corps sont sans vitesse. Entre la plaque et la poulie, le fil n'est pas tendu, et l'excès de sa longueur entre le point d'attache E *et le point* H *où la tangente* EH, *qui est horizontale, toucherait la poulie est égal à* 1^{m}. *De même, entre la poulie et le poids* P, *le fil n'est pas tendu et il a un excès de longueur égal à* 1^{m}. *Le poids* P *est situé sur la tangente verticale à la poulie. L'horizontale* EH *passe par le centre de gravité de la plaque; de sorte que le frottement n'intervient pas pendant la percussion.*

On abandonne le système à lui-même. Étudier son mouvement.

SOLUTION.

Il y a un premier choc après lequel le poids P et le point K de la poulie ont une vitesse

$$v_1 = \frac{\sqrt{2g}}{6}.$$

Avant le deuxième choc, cette vitesse est devenue

$$v^2 = v_1^2 + \frac{1}{3}g = \frac{7g}{18}.$$

Après le deuxième choc, le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué en considérant l'axe de la poulie donne une vitesse nouvelle

$$v_2 = \frac{3}{8}v = \frac{1}{16}\sqrt{14g}.$$

On considère enfin après le deuxième choc le système entier (poids, disque, plaque). On applique le théorème du centre de gravité à la plaque, le théorème des aires au disque, et enfin on a pour le mouvement du poids P

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{9}{8}x + \frac{7g}{128}.$$

La vitesse devient nulle quand on a

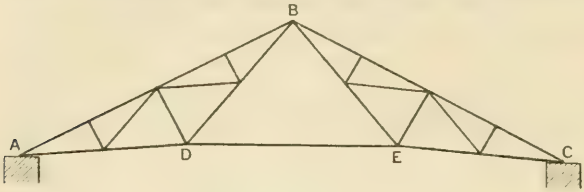
$$x = \frac{56}{128} = 0^m,43,$$

et le système entier s'arrête.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une ferme* ABCDE *du système Polonceau a* 40^m *de portée; elle repose par ses extrémités* A *et* C *sur deux murs verticaux.*

La hauteur du sommet B *de la ferme au-dessus de l'horizontale* AC *est de* 10^m *et la barre horizontale* DE *qui relie les deux arbalétriers est à* 1^m *au-dessus de* AC.

Chacun des arbalétriers AB *et* BC *est formé de quatre tiges s'articulant entre elles et sur lesquelles s'articulent d'autres tiges formant, comme l'indique la*



figure, six triangles pour l'ensemble du système de chaque arbalétrier.

La ferme supporte un poids de 400^{kg} *par mètre courant.*

Trouver les tensions des tiges en recourant au dessin ou au calcul, selon la tension qu'il s'agira de déterminer.

On calcule la tension de la base DE en prenant les moments par rapport au point B.

Pour toutes les autres forces ou tensions la règle du parallélogramme appliquée graphiquement suffit.

Astronomie.

1° *Définir l'équation du temps, calculer les premiers termes de son développement et montrer qu'elle s'annule quatre fois par an.*

Pour établir ce dernier point, on admettra que l'excentricité de l'orbite terrestre est de $\frac{1}{60}$ *et que* $\tang^2 \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{25}$, ε *désignant l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur.*

2° *Définir les éléments de l'orbite parabolique d'une comète. Établir l'équation algébrique qui,*

dans le cas du mouvement parabolique, sert à calculer l'anomalie vraie au moyen du temps écoulé depuis le passage au périhélie.

Épreuve pratique. — Première question : *Établir les formules qui donnent* $\sin^n x$ *et* $\cos^n x$ *en fonction des sinus et des cosinus des multiples de l'arc* x.

Faire l'application à $\sin^5 x$ *et vérifier l'exactitude de la formule obtenue en attribuant à* x *la valeur* $\frac{\pi}{3}$.

Deuxième question. — *D'après M. Faye, la longueur* s *d'un arc de méridien terrestre exprimé en toises a pour expression :*

$$s = [1,1997220]\alpha'' - [4,22571]\sin\alpha\cos 2\psi + [1,254]\sin 2\alpha\cos 4\psi,$$

α *désignant l'amplitude de cet arc, et* ψ *sa latitude moyenne.*

1° *Calculer en toises, au moyen de cette formule, la longueur de l'arc compris entre les parallèles de Paris et de Marseille, en adoptant pour latitudes respectives de ces parallèles :*

Paris.....	48°.50′.11″ N
Marseille.....	43°.18′.19″ »

(*dans la formule ci-dessus, les nombres entre crochets sont des logarithmes ;* α'' *désigne l'amplitude de l'arc évalué en secondes*);

2° *Calculer le même arc* s *en mètres, sachant que* 10000000 *de mètres valent* 5130740 *toises.*

SOLUTION.

Première question. — Des formules bien connues

$$2i\sin x = e^{ix} - e^{-ix}, \qquad 2\cos x = e^{ix} + e^{-ix},$$

on déduit immédiatement pour toutes les valeurs de n

$$2^{n-1}\cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \ldots,$$

pour n pair

$$(-1)^{\frac{n}{2}}2^{n-1}\sin^n x = \cos nx - \frac{n}{1}\cos(n-2)x$$
$$- \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x - \ldots,$$

et pour n impair

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}\sin^n x = \sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)x - \ldots.$$

Quand n est pair, il faut prendre la moitié seulement du dernier terme qui a été doublé

$$2^4\sin^5 x = \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x.$$

Deuxième question :

$$\varphi = 43^\circ.18'.19'' \qquad \varphi' - \varphi = \alpha = 5^\circ.31'.52''$$
$$\varphi' = 48.50.11 \qquad 2\alpha = 11.\ 3$$
$$\varphi + \varphi' = 2\psi = 92.\ 8.30 \qquad \alpha'' = 19912''$$
$$4\psi = 184.17$$

$$s = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

	Log.		Log.	T.
α''.....	4,2991149	I.....	5,4988369	315382,0
Coefficient I.....	1,1997220	II.....	1,78234	60,6
		III.....	—0,536	—3,4
$\sin\alpha$.....	$\bar{2}$,98401	s (en toises).		315439,2
$\cos 2\psi$.....	—$\bar{2}$,57262			
— Coefficient II..	—4,22571	s (en toises).	5,4989157	
		$\frac{\text{toise}}{\text{mètre}}$.....	0,2898200	
$\sin 2\alpha$.....	$\bar{1}$,283	s (en mètres).	5,7887357	614802,6 M
$\cos 4\psi$.....	—$\bar{1}$,999			
Coefficient III....	1,254			

Réponse :

$$s = \begin{cases} 315439,2 \text{ toises.} \\ 614802,6 \text{ mètres.} \end{cases}$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 193.

(1848, p. 368; 1898, p. 99.)

Trouver et discuter l'équation de la surface qui jouit de cette propriété que la somme des distances de ses points aux trois côtés d'un angle trièdre trirectangle est constante.

SOLUTION

Par M. L. Ripert.

Le trièdre donné étant pris pour trièdre coordonné, en rendant rationnelle l'équation

$$(1) \qquad \sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}+\sqrt{x^2+y^2}=2a,$$

on trouve aisément

$$[y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+4a^2(x^2+y^2+z^2)-4a^4]^2 \\ -16a^2(y^2+z^2)(z^2+x^2)(x^2+y^2)=0,$$

ou

$$(2) \quad \begin{cases} (\Sigma y^2z^2)^2-8a^2[x^2y^2z^2+\Sigma y^2z^2(y^2+z^2)] \\ \quad +8a^4(2\Sigma x^4+3\Sigma y^2z^2)-32a^6\Sigma x^2+16a^8=0. \end{cases}$$

Cette surface du huitième ordre admet les trois plans coordonnés et leurs six plans bissecteurs pour plans de symétrie. La section par un plan coordonné se décompose en quatre hyperboles équilatères

$$(3) \quad \begin{cases} z=0, \\ [xy\pm 2a(x+y)+2a^2] \\ \quad \times[xy\pm 2a(x-y)-2a^2]=0. \end{cases}$$

La section par un plan bissecteur se décompose en deux

droites doubles (parallèles à l'axe correspondant) et en deux ellipses ayant leurs centres sur ces droites doubles

$$y = z, \qquad (y \pm a\sqrt{2})^2(2x^2 + y^2 \pm 2a\sqrt{2}\,y - 2a^2) = 0.$$

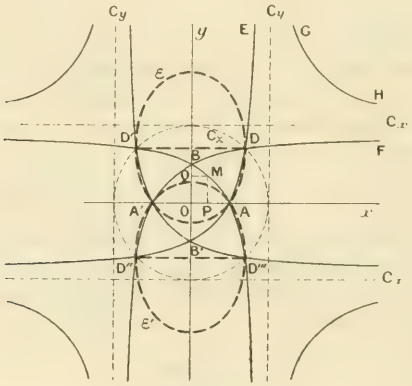
La surface a donc *douze* hyperboles, *douze* ellipses et *douze* droites doubles (arêtes d'un cube concentrique dont le côté est $2a\sqrt{2}$): la section par une face de ce cube (x, y ou $z = \pm a\sqrt{2}$) se compose des quatre arêtes (doubles) de cette face.

La courbe de l'infini se réduit aux trois points à l'infini sur les axes coordonnés, points qui sont *quadruples*, car, pour toute droite ($x = \lambda$, $y = \mu$), l'équation (2) a quatre racines z infinies. Ces points sont sommets *doubles* de trois cylindres de révolution ($x^2 + y^2 = 4a^2$, ...), passant chacun par quatre des droites doubles, et doublement asymptotes à la surface (2).

Cette surface correspond d'ailleurs, non seulement à l'équation (1), mais à l'équation

$$(4) \qquad \pm\sqrt{y^2 + z^2} \pm \sqrt{z^2 + x^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 2a.$$

En construisant les quatre hyperboles (3), qui coupent les axes aux points A, A'($x = \pm a$, $y = 0$), B, B'($x = 0$, $y = \pm a$),



on reconnaît aisément que la partie de la surface correspondant à l'équation (1), c'est-à-dire plus spécialement à l'énoncé, est celle qui est limitée, dans le plan des xy, par le quadrila-

tère curviligne ABA'B'. Cette partie de la surface est tout entière à l'intérieur de la sphère de rayon a.

Coupe par le plan des XY.

C_x Cylindre $y^2+z^2=4a^2$.
C_y Cylindre $z^2+x^2=4a^2$.
C_z Cylindre $x^2+y^2=4a^2$.
D, D', D'', D''' pieds de quatre droites doubles. Les huit autres se projettent deux à deux suivant DD', D'D'', D''D''', D'''D.

En prenant toutes les distances positivement, on voit que, dans l'angle XOY, on a respectivement

Sur AB.....	$OM+PM+QM=2a$
Sur AE.....	$OM+PM-QM=2a$
Sur BF.....	$OM-PM+QM=2a$
Sur GH	$-OM+PM+QM=2a$

Les autres parties sont symétriques.
ε, ε', DD', D''D''' projection des sections par les plans $Y=\pm z$.

Ce qui a empêché sans doute de donner plus tôt une solution de la question 193, c'est que, après avoir obtenu l'équation (2) de la surface, on a abandonné l'équation initiale (4). Or, (2) est presque impossible à manier, tandis que (4) montre beaucoup de choses. Par exemple, de (2), on tire

$$(5)\quad \begin{cases} z=0, \\ x^4y^4-8a^2x^2y^2(x^2+y^2) \\ \quad +8a^4(2x^4+2y^4+3x^2y^2)-32a^6(x^2+y^2)+16a^8=0. \end{cases}$$

Il est très difficile de voir *directement* que le premier membre est décomposable en quatre facteurs, tandis que, avec (4), on a

$$z=0, \qquad \pm y\pm x\pm\sqrt{x^2+y^2}=2a.$$

On voit alors que, dans le plan des xy, le lieu se compose de quatre hyperboles, et l'on a les quatre facteurs de (5), comme il est facile ensuite de le vérifier.

La même remarque s'applique aux sections par $y=\pm z$, ...

QUESTIONS.

1833. Soit

$$\begin{aligned} &ax^2 + 2bxy + cy^2 \\ &\quad = (a' + ia'')x^2 + 2(b' + ib'')xy + (c' + ic'')y^2 \end{aligned}$$

une forme binaire quadratique à coefficients imaginaires telle que la partie réelle

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$$

soit une forme positive. Démontrer que le déterminant de la forme proposée

$$D = ac - b^2$$

n'est jamais négatif (¹). Soit

$$\sqrt{D} = \alpha + i\beta$$

la valeur principale (celle des deux valeurs de la racine dont la partie réelle α est > 0) de la racine carrée de ce déterminant.

Posons

$$a = a_0\sqrt{D}, \qquad b = b_0\sqrt{D}, \qquad c = c_0\sqrt{D};$$

a_0, b_0, c_0 sont des quantités imaginaires dont nous désignerons les parties réelles respectivement par a'_0, b'_0, c'_0.

Faire voir que la forme

$$a'_0x^2 + 2b'_0xy + c'_0y^2$$

est aussi une forme positive. (J. Franel.)

ERRATA.

T. XVII, 1898. — P. 99, ligne 15, il y a une légère erreur typographique. Au lieu de *constant*, lisez *constante*.

(¹) C'est-à-dire que s'il est réel, il est nécessairement positif.

[K6b]

SUR LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES SURFACES, RAPPORTÉES A DEUX TRIÈDRES BIRECTANGLES SUPPLÉMENTAIRES MOBILES;

PAR M. l'abbé ISSALY.

1. Considérons comme prélude une ligne, tout d'abord quelconque (s), située sur une surface F'', ou même [1] sur une pseudo-surface $\mathcal{F}''$, tangentes, à l'origine M, au plan des XY, et supposons en outre que l'axe des X du trièdre *trirectangle* mobile MXYZ, ou T, coïncide avec la tangente en M à la courbe.

Soient $a, b, c, a', \ldots$ les cosinus directeurs des arêtes de ce trièdre, par rapport au trièdre fixe T_0, et soit enfin R le rayon de première courbure de la ligne proposée. La simple projection sur l'axe OX_0, par exemple, d'un triangle isoscèle ayant pour longueur de ses côtés égaux l'unité, nous donnera

$$a + d\sigma \cos(R, X_0) - (a + da) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{da}{d\sigma} = \cos(R, X_0).$$

Mais on a, par définition, $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R}$; donc

$$\frac{da}{ds} = \frac{\cos(R, X_0)}{R} = \frac{a'}{R_y} + \frac{a''}{R_z} = a'r - a''q.$$

[1] *Voir* notre *Théorie des systèmes triples de pseudo-surfaces* (*Nouvelles Annales*, p. 204; 1890).

en posant

$$r = \frac{1}{R_y} \qquad \text{et} \qquad q = -\frac{1}{R_z}.$$

Que si maintenant, d'isolée qu'elle était, la courbe (3) devient une ligne *coordonnée*, on conçoit sans peine que, par une généralisation ou une extension convenables de la même méthode, on puisse établir *géométriquement* [1] le système qui suit :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial s} &= a'r - a''q, \\ \frac{\partial a'}{\partial s} &= a''p - ar, \\ \frac{\partial a''}{\partial s} &= aq - a'p. \end{aligned} \right.$$

aussi bien que son analogue

$$(1') \qquad \frac{\partial a}{\partial s'} = a'r' - a''q',$$

. . . . . .

De là diverses conséquences dignes de toute attention.

1° Lorsqu'il s'agit de pseudo-surfaces, les arcs ds, ds' doivent être regardés comme *indépendants*. S'il s'agit de surfaces, au contraire, on a, pour les soumettre au calcul, les expressions usuelles

$$ds = A\,du, \qquad ds' = A'\,du'.$$

2° On sait que, de nos jours, le système communément adopté pour tenir lieu des relations (1) est

$$\frac{\partial a}{\partial u} = a'r - a''q.$$

. . . . . .

---

[1] Pour plus de détails, *voir* dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* l'article intitulé *Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites;* 1888.

Or, le calcul précédent fait voir qu'un tel système est manifestement *fautif* et qu'on doit, bon gré mal gré, dans le cas des surfaces notamment, le remplacer par cet autre

$$(1') \qquad \frac{\partial a}{\partial s} = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial a}{\partial u} = a'r - a''q,$$

. . . . . .

3° Il est vrai que, pour neutraliser ou compenser l'erreur ainsi commise, on prend $r = \frac{\Lambda}{R_y}$, $q = -\frac{\Lambda}{R_z}$, au lieu de $r = \frac{1}{R_y}$, $q = -\frac{1}{R_z}$; mais une telle substitution n'en est pas moins vicieuse, ainsi que la démonstration ci-dessus le prouve quasi par surcroît.

4° Au reste, la compensation indiquée est loin d'être toujours aussi efficace qu'on pourrait le croire, car, substituer, par exemple, la condition analytique explétive

$$\Lambda' p + \Lambda q' = 0,$$

à la condition géométrique exacte $p + q' = 0$, dans les calculs relatifs aux surfaces en général, c'est se mettre dans l'impossibilité d'établir *directement* la propriété caractéristique de toute surface, laquelle consiste, on le sait, dans l'orthogonalité de ses lignes de courbure. Mais nous aurons à revenir tout à l'heure sur ce point important.

2. Au trièdre trirectangle mobile qui nous a servi jusqu'ici, substituons deux trièdres *birectangles* supplémentaires MXYZ ou T, d'angle Φ, et MX_1Y_1Z ou T_1, d'angle $\pi - \Phi$. Soient a, b, c, a', ... et a_1, b_1, c_1, a'_1, ... les cosinus directeurs de leurs arêtes respectives. Par rapport au premier de ces trièdres, le sys-

tème (1') devra être remplacé par le suivant :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial s} &= \frac{1}{A}\frac{\partial a}{\partial u} = a'_1 r - a''_1 q \sin\Phi, \\ \frac{\partial a'}{\partial s} &= \frac{1}{A}\frac{\partial a'}{\partial u} = a''_1 p \sin\Phi - a_1 n, \\ \frac{\partial a''}{\partial s} &= \frac{1}{A}\frac{\partial a''}{\partial u} = a_1 q - a'_1 p, \end{aligned}\right.$$

dans lequel

$$(3)\qquad n = r + \frac{\partial\Phi}{\partial s} = r + \frac{1}{A}\frac{\partial\Phi}{\partial u},$$

et où les cosinus qui y figurent sont liés entre eux par les relations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} a \sin\Phi &= a_1 + a'_1 \cos\Phi, \\ a' \sin\Phi &= a'_1 + a_1 \cos\Phi, \\ a'' &= a''_1. \end{aligned}\right.$$

Par rapport au trièdre T_1, on aura de même

$$(2')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial s} &= \frac{1}{A}\frac{\partial a_1}{\partial u} = a' n_1 - a'' q_1 \sin\Phi, \\ \frac{\partial a'_1}{\partial s} &= \frac{1}{A}\frac{\partial a'_1}{\partial u} = a'' p_1 \sin\Phi - a r_1, \\ \frac{\partial a''_1}{\partial s} &= \frac{1}{A}\frac{\partial a''_1}{\partial u} = a q_1 - a' p. \end{aligned}\right.$$

avec

$$(3')\qquad n_1 = r_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial s} = r_1 + \frac{1}{A}\frac{\partial\Phi}{\partial u};$$

ce qui, rapproché de (3), entraîne, remarquons-le dès à présent,

$$n_1 = n, \qquad r_1 = r.$$

Quant à la *démonstration* de ces formules, on la trouvera implicitement renfermée dans notre Mémoire déjà cité de 1890. Disons toutefois que les composantes *orthogonales* qui entrent dans les formules,

beaucoup plus générales, de ce premier Travail, se rattachent à nos composantes *obliques* actuelles par les relations simples

$$(5)\qquad \begin{cases} p + q\cos\Phi = p = p_1\sin\Phi, \\ q + p\cos\Phi = q = q_1\sin\Phi, \\ r = r = r_1, \end{cases}$$

et par leurs inverses

$$(5')\qquad \begin{cases} p_1 - q_1\cos\Phi = p_1 = p\sin\Phi, \\ q_1 - p_1\cos\Phi = q_1 = q\sin\Phi, \\ r_1 = r_1 = r. \end{cases}$$

3. Appliquons immédiatement ces éléments de calcul à la rectification ou à la correction (dans le sens expliqué plus haut) du premier des deux systèmes ternaires usuels de la théorie des surfaces.

A cet effet, si x_0, y_0, z_0 désignent les coordonnées de l'origine M, par rapport au trièdre *fixe* T_0, on aura

$$dx_0 = \frac{\partial x_0}{\partial u}du + \frac{\partial x_0}{\partial u'}du' = a\,ds + a'ds' = A\,a\,du + A'a'\,du,$$

et, par suite,

$$(6)\qquad \frac{\partial x_0}{\partial u} = Aa, \qquad \frac{\partial x_0}{\partial u'} = A'a'.$$

Égalant entre elles les dérivées $\frac{\partial^2 x_0}{\partial u\partial u'}$ et $\frac{\partial^2 x_0}{\partial u'\partial u}$, et annulant, après les avoir développés, les coefficients des cosinus a, a'_1, a''_1, on obtient (sous la forme la plus avantageuse pour nos calculs ultérieurs) le système exact annoncé, savoir :

$$(7)\qquad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial u'} = -\frac{AA'}{\sin\Phi}(n - r'\cos\Phi), \\ \frac{\partial A'}{\partial u} = \frac{AA}{\sin\Phi}(r' - n\cos\Phi), \\ p + q' = 0. \end{cases}$$

De lui-même, on le voit, il nous fournit, sous sa vraie forme, la condition *caractéristique* dont nous avons parlé précédemment. Que cette condition soit telle, en effet, cela résulte de ce que l'équation générale des lignes de courbure de la pseudo-surface $\mathfrak{F}''$ étant, comme on peut s'en assurer, à part,

$$p_1\, ds^2 + (q_1 + p'_1)\, ds\, ds' + q'_1\, ds'^2 = 0,$$

ces mêmes lignes ne peuvent devenir celles de la surface F'' que si la condition classique d'orthogonalité

$$p_1 + q'_1 + (q_1 + p'_1)\cos\varphi = 0,$$

ou bien, d'après (5),

$$p - q' = 0,$$

se trouve satisfaite, ce qui est justement la troisième des équations (7).

Au surplus, si l'on reprend le calcul précédent au moyen des identités corrélatives

$$(6') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = \dfrac{A}{\sin\Phi}(a_1 + a'_1\cos\Phi), \\[2ex] \dfrac{\partial x_0}{\partial u} = \dfrac{A'}{\sin\Phi}(a'_1 + a_2\cos\Phi), \end{cases}$$

le trièdre T_1 permettra de contrôler les résultats acquis (7) à l'aide du système similaire et *équivalent*

$$(7') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial u'} = \dfrac{AA'}{\sin\Phi}(n_1 - r'_1\cos\Phi), \\[2ex] \dfrac{\partial A}{\partial u} = \dfrac{AA'}{\sin\Phi}(r'_1 - n_1\cos\Phi), \\[2ex] p_1 - q'_1 - (q_1 + p'_1)\cos\Phi = 0. \end{cases}$$

4. Arrivons au second système ternaire de la théorie qui nous occupe, et pour cela reprenons d'abord le trièdre T. C'est de l'identité $\dfrac{\partial^2 a}{\partial u\,\partial u'} = \dfrac{\partial^2 a}{\partial u'\,\partial u}$ qu'il nous

faudra partir ici. Mais, sans nous engager dans un calcul analogue au précédent, il sera beaucoup plus simple d'utiliser les formules (19) de notre premier Mémoire, en les adaptant aux variables s et s', et l'on aura

$$(8)\qquad \frac{\partial(\mathrm{A}p_1)}{\partial u'} - \frac{\partial(\mathrm{A}'p'_1)}{\partial u} = \mathrm{AA}'(qn' - nq'),$$

ou bien (en vue de réductions prochaines)

$$\mathrm{A}\frac{\partial p_1}{\partial u'} - \mathrm{A}'\frac{\partial p'_1}{\partial u} = -p'_1\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'} + p'_1\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u} + \ldots.$$

Passant de ces projections orthogonales aux projections obliques correspondantes (5') et éliminant $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'}$, $\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u}$ à l'aide de leurs premières expressions (7), il viendra (après avoir divisé les deux membres par AA')

$$\frac{\partial(p\sin\Phi)}{\partial s'} - \frac{\partial(p'\sin\Phi)}{\partial s} = \left\{\begin{array}{l} p(n - r'\cos\Phi) + p'(r' - n\cos\Phi) \\ \quad + n'(q + p\cos\Phi) - n(q' + p'\cos\Phi). \end{array}\right.$$

Il ne reste plus qu'à développer ces deux dérivées partielles, puis à y remplacer $\frac{\partial\Phi}{\partial s}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial s'}$ par $n - r$ ou $n' - r'$ (6) pour obtenir la première des équations cherchées. Et comme les deux autres se calculent de la même façon, nous les grouperons toutes dans le Tableau qui suit :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\partial p}{\partial s'} - \frac{\partial p'}{\partial s}\right)\sin\Phi = (pn + p'r') + (qn - nq') - p'(n + r)\cos\Phi, \\ \left(\frac{\partial q}{\partial s'} - \frac{\partial q'}{\partial s}\right)\sin\Phi = (qn + q'r') + (rp' - pr') - q(n' + r')\cos\Phi, \\ \left(\frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{\partial r'}{\partial s}\right)\sin\Phi = (rn + r'^2) + (pq' - qp')\sin^2\Phi - r'(n + r)\cos\Phi; \end{array}\right.$$

en rappelant que ∂s, $\partial s'$ peuvent, si bon semble, y être remplacés par $\mathrm{A}\,\partial u$, $\mathrm{A}'\partial u'$ et qu'on a en sus $p + q' = 0$ [1].

[1] L'équation de l'indicatrice d'une surface quelconque pouvant

Lorsque l'angle Φ est constant, il vient $n = r$, $n' = r'$, et s'il est droit ces derniers termes disparaissent.

5. Vérifions notre Tableau dans le cas remarquable où les axes MX, MY coïncident avec les tangentes, à l'origine, des lignes de courbure de la surface F''. Outre les conditions précédentes, on a encore $p = q' = 0$ par hypothèse. D'autre part on peut constater (n° 1) qu'avec $r = \frac{1}{R_y}$, $q = -\frac{1}{R_z}$, on a également $p' = \frac{1}{R'_z}$, $r' = -\frac{1}{R'_x}$. Tenant compte de toutes ces particularités, le système (9) se réduit à

$$(9')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{R'_z}\right) &= \frac{1}{R'_x}\left(\frac{1}{R'_z} - \frac{1}{R_z}\right),\\ \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{R_z}\right) &= \frac{1}{R_y}\left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{R'_z}\right),\\ \frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{R_y}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{R'_x}\right) &= \frac{1}{R_y^2} + \frac{1}{R'^2_x} + \frac{1}{R_z R'_z}. \end{aligned}\right.$$

Or, sous cette forme on reconnaît à vue trois des neuf relations différentielles signalées par Lamé dans ses recherches sur les systèmes orthogonaux, à savoir celles qui sont relatives à la surface F'', tangente en M au plan des XY.

6. Le trièdre T_1 donne lieu à des considérations ana-

---

s'écrire

$$q X^2 - (p - q') XY - p' Y^2 = -\frac{1}{\sin\Phi}.$$

On voit qu'elle ne peut représenter une hyperbole équilatère que si l'on a

$$q - p' + (p - q')\cos\Phi = 0,$$

ou bien (5)

$$p_1 - p'_1 = 0.$$

Telle est, dès lors, sous sa double forme, la condition (auxiliaire) qui sert à spécifier les *surfaces minima*.

logues, que nous allons retracer en peu de mots. Et d'abord il n'y a rien à ajouter à ce qui a été dit au sujet du premier des systèmes ternaires déjà étudié (n° 3). En ce qui concerne le second, les formules (20) de notre premier Mémoire nous donnent immédiatement

$$(10)\qquad \frac{\partial(\mathrm{A}p)}{\partial u'} - \frac{\partial(\mathrm{A}'p')}{\partial u} = \mathrm{A}\mathrm{A}'(q_1 r'_1 - r_1 q'_1),$$

ou bien

$$\mathrm{A}\frac{\partial p}{\partial u'} - \mathrm{A}'\frac{\partial p'}{\partial u} = -p\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'} + p'\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u} + \ldots.$$

Procédant à l'exemple du premier cas, on trouve

$$\frac{\partial(p_1 \sin\Phi)}{\partial u'} - \frac{\partial(p'_1 \sin\Phi)}{\partial u} = \left\{\begin{array}{l} p_1(n_1 - r'_1\cos\Phi) + p'_1(r'_1 - n_1\cos\Phi) \\ \quad + r'_1(q_1 - p_1\cos\Phi) - r_1(q'_1 - p'_1\cos\Phi); \end{array}\right.$$

puis enfin, conjointement avec la troisième des relations (7'),

$$(11)'\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial p_1}{\partial s'} - \dfrac{\partial p'_1}{\partial s}\right)\sin\Phi = (p_1 n_1 + p'_1 r'_1) + (q_1 r'_1 - r_1 q'_1) - p_1(r'_1 + n'_1)\cos\Phi, \\ \left(\dfrac{\partial q_1}{\partial s'} - \dfrac{\partial q'_1}{\partial s}\right)\sin\Phi = (q_1 n_1 + q'_1 r'_1) + (n_1 p'_1 - p_1 n'_1) - q'_1(r_1 + n_1)\cos\Phi, \\ \left(\dfrac{\partial n_1}{\partial s'} - \dfrac{\partial n'_1}{\partial s}\right)\sin\Phi = (n_1^2 + n'_1 r'_1) \\ \qquad\qquad + (p_1 q'_1 - q_1 p'_1)\sin^2\Phi - n_1(r'_1 + n'_1)\cos\Phi. \end{array}\right.$$

Que si, à titre de vérification, on se propose de passer de ce dernier système à son corrélatif (9) et *vice versa* il sera indispensable de reprendre avant tout les variables u, u' et, par elles, les fonctions A, A'. On s'aidera ensuite (pour la première de ces opérations) de la seconde des formes données aux relations (3), et l'on tiendra compte enfin utilement de l'identité suivante :

$$pq' - qp' = p_1 q'_1 - q_1 p'_1.$$

Dans le cas particulier où Φ est constant, il suffira de faire partout $n_1 = r_1$, $n'_1 = r'_1$.

7. Les développements dans lesquels nous venons d'entrer au sujet des surfaces ne doivent pas nous faire perdre de vue la part que dans ces questions réclament à bon droit, elles aussi, les pseudo-surfaces. C'est même par ces dernières que nous aurions dû commencer, si nous nous étions astreint à suivre pas à pas la même marche que dans notre premier Travail. Quoi qu'il en soit, on vérifiera sans peine qu'en considérant s, s', non plus comme des fonctions de u et de u', mais comme des variables indépendantes, il vient, pour correspondre au trièdre T et prendre la place des équations (9),

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial s'} - \frac{\partial p'}{\partial s}\right)\sin\Phi &= (qn' - nq') - (rp' - pr')\cos\Phi,\\ \left(\frac{\partial q}{\partial s'} - \frac{\partial q'}{\partial s}\right)\sin\Phi &= (rp' - pr') - (qn' - nq')\cos\Phi,\\ \left(\frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{\partial r'}{\partial s}\right)\sin\Phi &= (pq' - qp')\sin^2\Phi - K''. \end{aligned}\right.$$

On trouvera de même, pour correspondre à T_1 et remplacer les équations (11),

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial p_1}{\partial s'} - \frac{\partial p'_1}{\partial s}\right)\sin\Phi &= (q_1 r'_1 - r_1 q'_1) + (n_1 p'_1 - p_1 n'_1)\cos\Phi,\\ \left(\frac{\partial q_1}{\partial s'} - \frac{\partial q'_1}{\partial s}\right)\sin\Phi &= (n_1 p'_1 - p_1 n'_1) - (q_1 r'_1 - r_1 q'_1)\cos\Phi,\\ \left(\frac{\partial n_1}{\partial s'} - \frac{\partial n'_1}{\partial s}\right)\sin\Phi &= (p_1 q'_1 - q_1 p'_1)\sin^3\Phi = K''. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas d'exception où $\Phi = \text{const.}$, les deux premières équations de (12) peuvent, à cause de $n = r = r_1$ et de $n' = r' = r'_1$, s'écrire plus simplement ainsi en vertu des relations (5')

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s'} - \frac{\partial p'}{\partial s} &= q_1 r'_1 - r_1 q'_1,\\ \frac{\partial q}{\partial s'} - \frac{\partial q'}{\partial s} &= r_1 p'_1 - p_1 r'_1. \end{aligned}\right.$$

Pareillement, les deux premières de (13) reviennent, d'après (5), à

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial s'} - \dfrac{\partial p'_1}{\partial s} = qr' - rq', \\[2ex] \dfrac{\partial q_1}{\partial s'} - \dfrac{\partial q'_1}{\partial s} = rp' - pr', \end{cases}$$

Quant aux dernières équations des deux systèmes, on établira leur coïncidence absolue en observant qu'outre $K'' = K''_1$ (selon une remarque déjà faite), on a actuellement par hypothèse $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial s'} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s' \partial s}$ et, par suite, à cause de $n = n_1$, $n' = n'_1$

$$\frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{\partial r'}{\partial s} = \frac{\partial\left(n_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)}{\partial s'} - \frac{\partial\left(n'_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial s'}\right)}{\partial s} = \frac{\partial n_1}{\partial s'} - \frac{\partial n'_1}{\partial s},$$

ce qui démontre bien l'identité des équations considérées.

[A4a]

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES GROUPES FINIS;

PAR M. MICHAEL BAUER.

Je me propose de généraliser quelques théorèmes de M. *Frobenius* (¹) sur le nombre de certains sous-groupes. Les méthodes employées sont celles de M. Frobenius.

I. *Le nombre des sous-groupes d'ordre* $\frac{n}{p}$ *est* $\equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} (\bmod p)$ *selon qu'il y a entre eux des sous-groupes invariants ou non. Le nombre* n *désigne l'ordre du groupe,* p *est un facteur premier.*

(¹) *Berliner Sitzungsberichte*, 1895, p. 163-194, 981-993.

S'il n'y a pas de sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$, le nombre des sous-groupes d'ordre $\frac{n}{p}$ est évidemment $\equiv 0 \pmod{p}$. Soient donc A, B deux sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$. Alors, désignant le groupe donné par h, on a

$$h = AB;$$

d'où il suit que le plus grand commun diviseur de A et de B est un sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{p^2}$. Si E est un autre sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{p}$, le plus grand commun diviseur de A et de E est différent du plus grand commun diviseur de A et de B. Ainsi les sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$ se partagent en classes. La classe $i^{\text{ième}}$ se compose des sous-groupes

$$(1) \qquad A_1^{(i)}, \quad A_2^{(i)}, \quad \ldots,$$

dont le plus grand commun diviseur avec A est $\mathfrak{I}_i$. Mais les facteurs-groupes

$$\frac{A_1^{(i)}}{\mathfrak{I}_i}, \quad \frac{A_2^{(i)}}{\mathfrak{I}_i}, \quad \ldots,$$

ne sont que les sous-groupes d'ordre p du groupe $\frac{h}{\mathfrak{I}_i}$, dont l'ordre est p^2, excepté le sous-groupe $\frac{A}{\mathfrak{I}_i}$. Ainsi, chaque classe contient des groupes en nombre p ou 0; le nombre des sous-groupes invariants est donc $\equiv 1 \pmod{p}$.

S'il y a encore des sous-groupes d'ordre $\frac{n}{p}$ qui ne sont pas invariants, leur nombre est $\equiv 0 \pmod{p}$.

C. Q. F. D.

II. *Le nombre des sous-groupes invariants d'ordre* $\frac{n}{p^3}$

est $\equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \pmod{p}$ *selon qu'il y a des sous-groupes invariants entre eux ou non.*

S'il n'y a pas de sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$, le nombre cherché est évidemment $\equiv 0 \pmod{p}$. S'il y a des sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$, alors il existe aussi des sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$. Soient les sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$

$$(2) \qquad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_r \qquad r \equiv 1 \pmod{p}.$$

et soient les sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$,

$$(3) \qquad B_1, \quad B_2, \quad \ldots, \quad B_s.$$

Si nous désignons par a_ρ le nombre des groupes (3) contenus comme sous-groupes dans A_ρ et par b_σ le nombre des groupes (2) que contient B_σ, nous avons

$$(4) \qquad \sum_{\sigma=1}^{s} b_\sigma = \sum_{\rho=1}^{r} a_\rho.$$

Cependant

$$b_\sigma \equiv 1 \pmod{p}.$$

Car, si le groupe A_x contient B_σ comme sous-groupe, alors le groupe $\frac{A_x}{B_\sigma}$ est un sous-groupe d'ordre $p^{\beta-1}$ du groupe $\frac{h}{B_\sigma}$ dont l'ordre est p^β. De la relation (4) il suit donc que

$$(5) \qquad \sum_{\sigma=1}^{s} b_\sigma = s \equiv \sum_{\rho=1}^{r} a_\rho \pmod{p}.$$

Déterminons maintenant les nombres a_ρ. A_ρ est un sous-groupe invariant. Nous démontrerons qu'il contient

des groupes d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$ comme sous-groupes invariants (ces sous-groupes ne doivent pas être à la fois des sous-groupes invariants de h). Posons

$$n = p^\alpha m, \text{ le plus grand commun diviseur } (p, m) = 1.$$

Si A_ρ contient, par exemple, B_1 comme sous-groupe, B_1 est déjà un sous-groupe cherché. S'il n'est pas ainsi, nous avons

$$h = A_\rho B_1,$$

d'où il suit que le plus grand commun diviseur de A et de B est un groupe $\mathfrak{J}$, dont l'ordre est $p^{\alpha-\beta-1} m$. Ce groupe est sous-groupe invariant de A. Le facteur-groupe $\frac{A_\rho}{\mathfrak{J}}$ d'ordre p^β a des sous-groupes invariants d'ordre p, donc A a des sous-groupes invariants d'ordre

$$p^{\alpha-\beta} m = \frac{n}{p^\beta}.$$

Notre théorème II étant déjà démontré pour les sous-groupes d'indice p, nous pouvons le supposer démontré pour les sous-groupes d'indices

$$p, \quad p^2, \quad \ldots \quad p^{\beta-1}.$$

Il en résulte que le nombre des sous-groupes invariants de A_ρ, dont l'ordre est $\frac{n}{p^\beta}$, est $\equiv 1 \pmod p$. Il faut encore exclure de ces sous-groupes ceux qui ne sont pas des sous-groupes invariants de G. Leur nombre est évidemment $\equiv 0 \pmod p$. Donc

$$a_\rho \equiv 1 \pmod p,$$

d'où il suit que

$$s = \sum_{\rho=1}^{r} a_\rho = r \equiv 1 \pmod p.$$

S'il y a encore des sous-groupes d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$ qui ne sont pas invariants, leur nombre est $\equiv 0 \pmod{p}$.

C. Q. F. D.

M. *Frobenius* (¹) a démontré le théorème suivant :

III. *Posons*

$$n = ab.$$

Si le plus grand commun diviseur

$$(a, b) = 1,$$

alors le groupe ne peut avoir qu'un seul sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{b}$. *Chaque sous-groupe, dont l'ordre divise* $\frac{n}{b}$, *est contenu comme sous-groupe dans ce sous-groupe invariant.*

On peut établir par un raisonnement analogue la proposition suivante, qui complète ce théorème :

IV. *Chaque sous-groupe invariant, dont l'ordre divise* $\frac{n}{b}$, *est sous-groupe de tous les sous-groupes d'ordre* $\frac{n}{b}$.

De I et IV on déduit les propositions suivantes :

V. *Posons*

$$n = ab,$$

$$(a, b) = 1, \qquad p \text{ est un nombre premier.}$$

Si le nombre des sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{bp}$ *est* > 1, *alors le nombre des sous-groupes d'ordre* $\frac{n}{bp^\beta}$, $\beta > 1$, *est* $\equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \pmod{p}$.

(¹) Page 170, I, § II.

Il suit alors de ce qui précède qu'il y a un sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{b}$, etc.

VI. *Posons*

$$n = ab,$$

$$(a, b) = 1, \qquad p \text{ est un nombre premier.}$$

S'il y a un sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{bp^\beta}$, *alors il existe un nombre*

$$0 \leq \gamma \leq \beta,$$

de telle sorte que le groupe ait un seul sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{bp^\gamma}$.

Les théorèmes III, IV sont contenus dans les suivants :

VII. *Posons*

$$n = n' \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}, \qquad n' = ab,$$

$$(n', p_i) = 1, \qquad (a, b) = 1.$$

Si A *est un sous-groupe invariant d'ordre*

$$a \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i},$$

alors chaque sous-groupe, dont l'ordre divise a, est sous-groupe de A.

VIII. *Si* A *est un sous-groupe d'ordre*

$$a \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i},$$

alors chaque sous-groupe invariant, dont l'ordre divise a, est sous-groupe de A.

Voici des conséquences de VIII :

IX. *Posons*

$$n = ab,$$

$$(a, b) = 1, \qquad p \text{ est un nombre premier.}$$

S'il y a un sous-groupe invariant d'ordre a, alors le nombre des sous-groupes d'ordre ap^β *est* $\equiv 1 \pmod{p}$. Car, G étant un sous-groupe d'ordre ap^β, le facteur-groupe $\frac{G}{A}$ est sous-groupe d'ordre p^β du groupe $\frac{h}{A}$.

X. *Si un groupe a un sous-groupe invariant, dont l'ordre n'est pas divisible par tous les facteurs premiers de n, il a aussi un sous-groupe invariant, de telle sorte qu'il n'existe pas d'autres sous-groupes invariants dont l'ordre soit le même.*

Soient A, B des sous-groupes invariants d'un même ordre, qui n'est pas divisible par tous les facteurs premiers de n. Le multiple

$$AB$$

est aussi un sous-groupe invariant, dont l'ordre a la même propriété, etc.

XI. *Si l'ordre d'un sous-groupe invariant maximum, m, n'est pas divisible par tous les facteurs premiers de n, il n'y a pas d'autre sous-groupe invariant d'ordre m.*

XII. *Si* M *est un sous-groupe maximum dont l'ordre m n'est pas divisible par tous les facteurs premiers de n, alors chaque sous-groupe invariant, dont l'ordre divise m, est sous-groupe de* M.

M. *Frobenius* démontre le *théorème généralisé de M. Sylow* en faisant usage de l'équation symbolique

$$X^g = E.$$

On peut éviter la discussion de cette équation si l'on part du *théorème de M. Sylow*, et l'on fait l'induction par ordres décroissants.

[$M_1 5c\alpha$]

SUR LES CUBIQUES STROPHOÏDALES;

PAR M. LAGRANGE,
Professeur à Brest.

Définition. — Soient O et A deux points fixes et (Δ) une droite passant par A; M un point variable de (Δ). On sait que si, sur OM, on prend deux points P et P′ tels que MP = MP′ = MA le lieu de ces points est une strophoïde ayant pour point double le point A.

Dans le cas où (Δ) ne passe pas par A le lieu est également une cubique que nous appellerons une cubique *strophoïdale* et nous nous proposons, dans cet article, d'indiquer quelques propriétés intéressantes de cette classe de cubiques.

Tout rayon issu de O coupe (Δ) en un seul point M et sur ce rayon il y a deux points P et P′ du lieu distincts de O. L'un de ces points ne peut venir en O que si l'on a MO = MA, c'est-à-dire que si M est sur la perpendiculaire au milieu de OA; soit Dμ cette perpendiculaire; le point O est un point simple du lieu et la tangente en ce point est le rayon Oμ. Au point O correspond le point σ tel que $\mu\sigma = \mu$O (*fig.* 1). Le lieu est donc bien une courbe du troisième ordre.

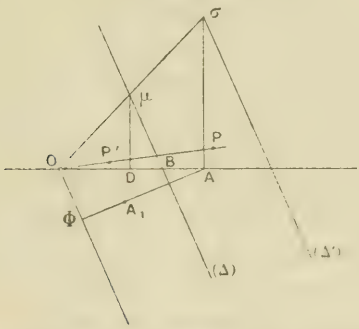
Remarquons, dès maintenant, que le point A_1 symétrique de A par rapport à (Δ) peut, dans la construction du lieu, remplacer A; on a, en effet, MA = MA_1 quel que soit M. On peut encore dire que P et P′ sont les

points communs au cercle de centre M et de rayon MA avec le rayon OM.

Les différents cercles forment un faisceau linéaire : à chaque cercle du faisceau correspond un rayon issu de O et inversement, de sorte que ce mode de génération du lieu est un cas particulier du mode de génération des cubiques quelconques indiqué par Chasles. Si OM devient une droite isotrope, c'est une asymptote du cercle correspondant, puisqu'elle passe par le centre du cercle et les points P et P′ sont confondus avec l'un des points cycliques du plan. La cubique est donc circulaire et les tangentes aux points cycliques, c'est-à-dire les asymptotes imaginaires, passent par O. Ce dernier point est donc un foyer singulier de la courbe.

Construisons maintenant l'asymptote réelle. Les points réels P et P′ ne peuvent s'éloigner à l'infini que si M s'éloigne à l'infini sur (Δ); à la limite le cercle de

Fig. 1.



centre M se réduit à la droite AA_1 et à la droite de l'infini; le point P′ a pour limite le point Φ, intersection de AA_1 avec la parallèle à (Δ) menée par O; le point P est à l'infini, mais les deux points P et P′ étant toujours à la même distance de (Δ) l'asymptote réelle est symé-

trique de $O\Phi$ par rapport à (Δ). Elle passe par σ que nous appellerons le *point de section*.

Forme de la courbe. — Les deux points P et P′ étant de part et d'autre de (Δ), et la distance MP n'étant jamais nulle, ne peuvent venir se confondre quand OM tourne autour de O. La cubique se compose donc de deux séries continues de points : elle est *bipartite*.

Elle comprend une branche infinie coupant son asymptote (Δ') en σ et d'un ovale qui passe par O et Φ. Des deux points A et A_1 l'un est sur la branche infinie, l'autre sur l'ovale.

Démontrons maintenant le théorème suivant :

Théorème. — *Toute cubique circulaire dont les asymptotes imaginaires se coupent sur la courbe est une cubique strophoïdale.*

Remarquons d'abord que $A\sigma$ est parallèle à $D\mu$ et, par suite, perpendiculaire à OA. De même σA_1 est perpendiculaire à OA_1. Supposons que, les points O et σ et la droite (Δ) restant fixes, le point A se déplace sur le cercle de diamètre $O\sigma$. A chaque position de A correspond une cubique strophoïdale et toutes ces cubiques ont neuf points communs, savoir : quatre points de contact qui sont les trois points à l'infini et le point O, puis le point σ. Elles forment donc un faisceau linéaire qui peut être défini par les deux cubiques suivantes : 1° la cubique formée par les deux droites isotropes issues de O et par (Δ') ; 2° la cubique formée par la droite de l'infini comptée deux fois et par $O\sigma$.

Cela posé, soit une cubique circulaire ayant un foyer singulier en O, pour asymptote réelle (Δ') et coupant son asymptote en σ. En appliquant aux trois points à l'infini le théorème bien connu sur les tangentiels de trois points en ligne droite, on voit que la tangente en O

est $O\sigma$ et, par suite, la cubique considérée fait partie du faisceau linéaire examiné plus haut.

Tangentes aux points A *et* A_1. — La tangente en A est la limite de AP quant M vient en B; or le triangle MAP étant isosccèle, AP est perpendiculaire à la bissectrice de $\widehat{PMA}$; quand M vient en B cette bissectrice a pour limite BA; donc la limite de AP est $A\sigma$. De même la tangente en A_1 est $A_1\sigma$. Du point σ on peut mener à la cubique quatre tangentes réelles, savoir : σA, σA_1, σO et l'asymptote (Δ'). Par suite, de tout point de la branche infinie on peut mener à la courbe quatre tangentes réelles : deux ont leurs points de contact sur la branche infinie, deux sur l'ovale.

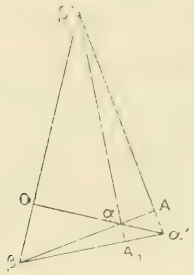
Tangentes aux points P *et* P'. — Considérons un rayon ON voisin de OM et soient Q et Q' les points du lieu situés sur ce rayon (le lecteur est prié de faire la figure). Les deux rayons OM, ON coupent l'asymptote en R et S. Dans le triangle ORS, les deux droites PQ et P'Q' sont deux transversales réciproques : elles coupent donc l'asymptote en deux points symétriques par rapport au milieu de RS. Lorsque N vient coïncider avec M, les droites PQ, P'Q' deviennent les tangentes en P et P'; par suite, ces deux tangentes coupent l'asymptote en deux points symétriques par rapport à R.

Tangentes parallèles à (Δ). — Une droite quelconque parallèle à (Δ) coupe la cubique en deux points variables P et Q; si OP et OQ coupent la courbe en P' et Q' la droite P'Q' est symétrique de PQ par rapport à (Δ). Les deux rayons OP, OQ sont donc deux rayons homologues d'un faisceau involutif dont les rayons doubles passent par les points de contact des tangentes parallèles à (Δ). Or $O\sigma$ et $O\Phi$, OA et OA_1 forment deux couples de rayons homologues; ces deux couples

forment deux angles ayant la même bissectrice; donc deux rayons homologues quelconques sont également inclinés sur la bissectrice de $\widehat{AOA_1}$ et les rayons doubles sont les bissectrices de cet angle et de l'angle adjacent supplémentaire.

Soient $O\alpha\alpha'$, $O\beta\beta'$ ces deux bissectrices (*fig.* 2); deux des points de contact, α' et β' par exemple, sont

Fig. 2.



sur la branche infinie, les deux autres sur l'ovale. En appliquant le théorème sur les tangentiels de trois points en ligne droite on voit que $\alpha\beta$ coupe la cubique en un troisième point qui a pour tangentiel σ; or ce troisième point n'est ni O ni le point à l'infini, c'est d'ailleurs un point de la branche infinie, donc c'est le point A. On verra de même que $\alpha'\beta'$ passe par A tandis que $\alpha\beta'$ et $\beta\alpha'$ passent par A_1.

Une propriété commune à toutes les cubiques circulaires nous apprend que la cubique considérée est anallagmatique par rapport à l'un quelconque des quatre points $\alpha\beta\alpha'\beta'$. On a donc, par exemple, $\overline{\alpha\beta}.\overline{\alpha A} = \overline{\alpha O}.\overline{\alpha\alpha'}$. Donc les quatre points $\beta A O \alpha'$ sont sur un cercle et $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ sont deux droites rectangulaires. Par suite, trois quelconques des points de contact $\alpha\beta\alpha'\beta'$ sont les som-

mets d'un triangle dont le point de concours des hauteurs est le quatrième point.

Points conjugués. — On sait qu'on appelle points conjugués sur une cubique deux points ayant le même tangentiel ; dans une cubique n'ayant pas de points singuliers, il y a trois genres de points conjugués ; dans ce qui va suivre nous ne parlerons que des points conjugués de même genre que les points cycliques. On démontre facilement que, dans toute cubique, deux couples de points conjugués du même genre et leurs tangentiels sont sur une conique et réciproquement, si deux couples de points conjugués et leurs tangentiels sont sur une conique, les deux couples sont du même genre :

Or, dans une cubique strophoïdale, les deux points cycliques ont pour tangentiel commun le point O ; donc :

Le cercle qui passe par deux points conjugués et par leur tangentiel passe par O.

Théorème. — *Le conjugué d'un point* P *est le point* Q′ *situé sur la parallèle à* (Δ) *menée par le point* P′, *intersection de* OP *avec la courbe.*

En effet, appliquons le théorème sur les tangentiels de trois points en ligne droite aux trois points de la droite P′Q′ (le troisième est à l'infini) et aux trois points OPP′ ; on en déduit facilement que les points P et Q′ ont le même tangentiel. Lorsque OP vient coïncider avec OA, OQ′ vient coïncider avec OA_1 ; or A et A_1 sont conjugués du même genre que les points cycliques, puisque le cercle déterminé par AA_1 et σ passe aussi par O. Les points P et Q′ sont donc conjugués.

Conséquence. — Le point O a pour conjugué le point réel à l'infini, Φ a pour conjugué σ. Les trois couples de points conjugués : $(O\infty)$, $(\Phi\sigma)$, (AA_1) permettent

de construire la courbe d'une manière discontinue par l'application du théorème suivant, dû à Hesse :

Théorème. — *Si* (aa') (bb') *sont deux couples de points conjugués du même genre, les droites* ab', ba' *et les droites* aa', bb' *se coupent en deux points conjugués du même genre.*

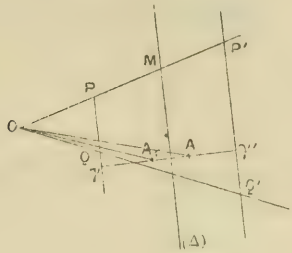
Autre mode de génération. — Considérons un rayon OPP' coupant la courbe en P et P'; soient Q' et Q les conjugués de P' et P; les droites PQ, $P'Q'$ sont parallèles à (Δ). Le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère $PQQ'P'$ est une cubique circulaire dont les six sommets du quadrilatère forment trois couples de points conjugués et les deux points cycliques sont conjugués du même genre. Ce lieu coïncide donc avec la cubique considérée; donc :

Toute cubique strophoïdale peut être, d'une infinité de manières, considérée comme le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère.

Toutes ces coniques ont leur centre sur (Δ); les deux foyers de l'une d'elles sont donc équidistants de (Δ) et comme ils ne sont pas en ligne droite avec le point O, ce sont deux points conjugués. En particulier A et A_1 sont deux foyers d'une conique inscrite dans le quadrilatère $PQQ'P'$; les sommets de la conique situés sur l'axe focal sont les points γ et γ' intersections de AA_1 avec PQ et $P'Q'$ (*fig.* 3). Cette remarque nous permet de construire les points d'intersection de la cubique avec une droite parallèle à (Δ). Le problème revient, en effet, à mener du point O les tangentes à une conique dont on connaît l'axe focal $\gamma\gamma'$ et les deux foyers A et A_1. Elle nous permet encore de donner le mode de génération suivant des cubiques strophoïdales :

Soient un système de coniques homofocales de foyers A et A_1 et un point O du plan; le lieu des points com-

Fig. 3.



muns aux tangentes à une conique issues du point O et des tangentes aux extrémités de l'axe focal est une cubique strophoïdale dont O est le foyer singulier.

On obtient immédiatement cette propriété en remarquant (*fig.* 3) que, si PP'QQ' sont les points donnés par l'une des coniques, on a

$$\widehat{PAP'} = 90^\circ$$

et, par suite,

$$MP = MP' = MA.$$

Tangente en un point quelconque. — Soient P un point de la courbe, Q le point situé sur la parallèle à l'asymptote menée par P, et Q' le troisième point situé sur OQ; P et Q' sont conjugués; soit R un point voisin de P; soit RS la parallèle à (Δ) menée par R. Nous avons vu que P et Q' sont les foyers d'une conique tangente à RO et RS; donc, d'après une propriété connue des coniques, on a

$$\widehat{ORQ'} = \widehat{PRS}.$$

Faisons tendre R vers P et soit PV la direction limite

de RP, c'est à-dire la tangente en P; on a

$$\text{limite } \widehat{ORQ'} = \widehat{OPQ'},$$

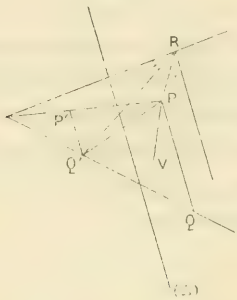
$$\text{limite } \widehat{PRS} = \widehat{VPQ};$$

donc

$$\widehat{OPQ'} = \widehat{VPQ},$$

ce qui montre que les angles $\widehat{OPQ}$ et VPQ' ont la même

Fig. 4.



bissectrice; il en résulte une construction simple de la tangente en P (*fig.* 4).

Cette construction nous permet de déterminer le tangentiel d'un point en prenant l'intersection de la tangente en ce point avec la tangente au point conjugué ou encore avec le cercle passant par le point, par son conjugué et par O.

[K1c]

SUR QUELQUES NOUVEAUX THÉORÈMES, RELATIFS AU TRIANGLE;

PAR M. F. CASPARY.

(Extrait d'une lettre adressée à M. E. LEMOINE.)

..... On doit à vous, Monsieur, à M. Brocard, à M. Neuberg et à d'autres éminents géomètres, des théorèmes, relatifs au triangle, dans lesquels le point qui porte votre nom est pris comme point de départ.

L'application des méthodes de Grassmann à la géométrie récente du triangle m'a conduit au résultat surprenant que lesdits théorèmes existent encore si l'on remplace le point d'intersection des symédianes par un point absolument quelconque.

Permettez-moi, Monsieur, de vous communiquer quelques-uns de mes théorèmes.

Soit $A_1A_2A_3$ un triangle, X un point absolument quelconque de son plan et $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ les points où les droites A_1X, A_2X, A_3X coupent les côtés. Soient, de plus, $B_2^{(1)}$ et $B_3^{(1)}$ les points où les parallèles menées par $X^{(3)}$ et $X^{(2)}$ respectivement aux côtés A_3A_1 et A_1A_2 coupent A_2A_3; et de même les points $B_3^{(2)}$ et $B_1^{(2)}$; $B_1^{(3)}$, $B_2^{(3)}$ obtenus par permutation cyclique. Soient enfin $B_1^{(1)}$, $B_2^{(2)}$, $B_3^{(3)}$ les points situés respectivement sur A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 et construits de façon que les segments $A_3B_1^{(1)}$, $A_1B_2^{(2)}$, $A_2B_3^{(3)}$ soient égaux respectivement aux segments $X^{(1)}A_2$, $X^{(2)}A_3$, $X^{(3)}A_1$. Alors on a les théorèmes suivants :

1. *Les droites* $A_1B_i^1$, $A_2B_i^2$, $A_3B_i^3$ *concourent au point* B_i $(i = 1, 2, 3)$.

2. *Les droites* B_iX *sont parallèles aux côtés* A_kA_l ($i, k, l = 1, 2, 3$; $2, 3, 1$; $3, 1, 2$).

3. *Les deux triangles* $A_1A_2A_3$ *et* $B_1B_2B_3$ *ont le même centre de gravité* G.

4. *Les droites* A_iG *passent par les milieux des segments* B_iX.

5. *Le point d'intersection* C_i *des droites* A_iX *et* B_iG *est situé sur la droite qui passe par* B_i *et le milieu du segment* B_kB_l.

6. *Les triangles* $A_1A_2A_3$ *et* $B_1B_2B_3$ *sont triplement homologiques, de façon que les droites* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 *concourent au point* D_1; *les droites* A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 *au point* D_2 *et les droites* A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2 *au point* D_3.

7. *Le centre de gravité du triangle* $D_1D_2D_3$ *est le point* G, *centre de gravité des triangles* $A_1A_2A_3$ *et* $B_1B_2B_3$.

8. *Si l'on désigne par* W_i *les points d'intersection des droites* A_kD_2 *et* A_lD_3, *les droites* A_iW_i *concourent au point* W.

9. *La droite* WX *passe par le milieu du segment* D_2D_3.

10. *Si l'on désigne par* L_i *les points d'intersection des droites* B_kC_l *et* B_lC_k *et par* X_i *les points d'intersection des droites* A_kL_k *et* A_lL_l, *les points* X *et* X_i *sont des points associés.*

11. *Les droites* B_iX_i *passent par les milieux des segments* A_kA_l.

12. *Si l'on désigne par* F_i *les points d'intersection des droites* A_kC_l *et* A_lC_k, *les droites* F_iG *sont parallèles aux droites* B_iX *et aux côtés* A_kA_l.

13. *Les droites* A_iF_i *concourent au point* F.

14. *Les droites* C_iF_i *concourent au point* Q.

15. *Les points* X, G, F, Q *sont situés sur la même*

droite, et de telle façon que le point Q *est le milieu du segment* FX *et le segment* $XG = \frac{1}{2}GF = 2GQ$.

16. *Les parallèles menées par les milieux des côtés* B_kB_l *aux côtés* A_kA_l *concourent au point* Q.

17. *Les parallèles menées par les points* A_i *aux côtés* B_kB_l *concourent au point* R.

18. *Les droites* B_iG *passent par les milieux des segments* A_iR.

19. *Les points* B_1, B_2, B_3, D_2, D_3, X *sont situés sur une même conique.*

20. *Les points* A_1, A_2, A_3, D_3, D_2, R *sont situés sur une même conique.*

Des théorèmes précédents se déduisent d'autres si l'on échange A_i avec B_i, et conséquemment D_2 avec D_3, X avec R, etc. Les théorèmes 4 et 18, 19 et 20 en sont des exemples.

Si le point quelconque X devient le point de Lemoine, les triangles $B_1B_2B_3$ et $C_1C_2C_3$ représentent le premier et le second triangle de Brocard et les points D_2 et D_3 les points brocardiens Ω' et Ω.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1899. — COMPOSITIONS.

Poitiers.

ANALYSE.

1. *Montrer que l'on peut toujours ramener aux quadratures l'intégration d'une équation de la forme*

$$y = xf(y') + \varphi(y') = 0.$$

Dans quels cas admet-elle des solutions singulières?

2. *Intégrer*

$$(y + xy')^2 = 4x^2y'.$$

Épreuve pratique. — *La surface représentée par l'équation*

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2}\right)^2 = \frac{4a^2b^2}{a^2y^2 - b^2x^2}$$

renferme un volume égal au produit de πab par le périmètre de l'ellipse

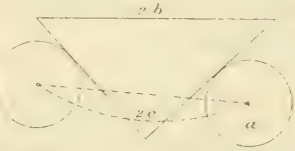
$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Rennes.

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — 1° *Étude cinématique du pivotement d'un corps rigide sur un point fixe.*

2° *Sur deux cylindres de révolution horizontaux*



fixes de même rayon a, distants de 2c, et dont les axes sont parallèles et situés dans un même plan horizontal, s'appuie un prisme horizontal homogène dont 2b est la base.

Montrer que l'axe instantané décrit dans l'espace un cylindre de révolution. Examiner comment se comporte par rapport au prisme la génératrice de ce cylindre qui est diamétralement opposé à l'axe instantané. En conclure le lieu de cet axe dans le prisme et les trajectoires des différents points dans l'hypothèse où le prisme n'a pas de glissement horizontal sur les

génératrices des cylindres. Faire voir que tout plan du prisme, parallèle à ses arêtes, enveloppe un cylindre de révolution horizontal : plans pour lesquels ce cylindre se réduit à une droite.

Déterminer enfin le mouvement que le poids fait prendre à ce prisme.

Remarque. — En suivant pas à pas la marche de l'énoncé, on résout très simplement ce problème.

Épreuve pratique. — *Un pendule composé est formé d'une tige métallique prismatique de petite section σ dont on connaît la longueur l. Cette tige est homogène et son poids spécifique est p. Elle est munie supérieurement d'un conteau et porte une masse mobile de poids P, qu'on peut fixer en diverses positions sur sa longueur ; le centre de gravité de cette masse parcourt l'axe de la tige. On n'a pas de moyen de déterminer exactement sa distance à l'axe du couteau, mais on peut mesurer avec une grande précision le déplacement ξ de ce point suivant la tige.*

On observe les durées d'oscillation t, t' pour deux positions de la masse séparées par la distance ξ. En conclure les deux longueurs de pendules synchrones et le moment d'inertie de la masse par rapport à l'axe mené par son centre de gravité parallèlement à l'arête du couteau.

Le couteau est supposé muni d'un appareil de réglage permettant dans le calcul des observations de faire abstraction de son moment d'inertie.

Effectuer les calculs pour les données numériques suivantes :

$$l = 2^{m},50, \qquad \sigma = 0^{mq},000006, \qquad p = 7^{gr}, \qquad P = 540^{gr},$$
$$\xi = 0^{m},3871, \qquad t = 1^{s},483, \qquad t' = 1^{s},574.$$

ANALYSE.

1° *Étude de la fonction analytique u définie par l'équation*

$$z = \cos u.$$

Loi des valeurs qu'elle peut prendre pour chaque valeur de z.

Points critiques. — *Expliquer comment le parcours d'un chemin convenable par la variable z permet à cette fonction d'acquérir en chaque point du plan une quelconque des valeurs dont elle est susceptible en ce point.*

2° *L'expression*

$$u = \frac{1}{x^m}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

dans laquelle m désigne un nombre entier positif, devant satisfaire identiquement à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

on demande : 1° de déterminer la forme la plus générale de la fonction $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$; *2° de transformer et de résoudre la même question en coordonnées polaires.*

Si l'on pose

$$\frac{y}{x} = t,$$

on trouve pour déterminer φ l'équation du second ordre

$$(1) \qquad (1+t^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2(m+1)t\frac{d\varphi}{dt} + m(m+1)\varphi = 0.$$

En comparant cette équation à la formule de Liebnitz,

on est ramené à poser

$$\varphi = \frac{d^{m-1}\psi}{dt^{m-1}}.$$

On trouve alors

$$\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}[(1+t^2)\psi] = 0.$$

D'où

$$\psi = \frac{f_m(t)}{1+t^2} = \frac{A+Bt}{1+t^2} + f_{m-2}(t),$$

$f_m(t)$ et $f_{m-2}(t)$ désignant des polynomes de degrés respectifs m et $m-2$, A et B désignant des constantes arbitraires.

On en déduit

$$\varphi(t) = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left(\frac{A-Bt}{(1+t^2)}\right).$$

La transformation et la résolution de cette question en coordonnées polaires ne présentent aucune difficulté.

Toulouse.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *On considère la surface réglée* S *formée par les normales menées à une quadrique en tous les points de la courbe d'intersection* C *de cette surface avec un plan donné* P. *Démontrer que la ligne de striction de cette surface* S *est la courbe de contact du cône qui lui est circonscrit et qui a même sommet que le cône circonscrit à la quadrique tout le long de la courbe* C.

II. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} - x - y - z = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} - x - y - z = 0,$$

$$\frac{dz}{dt} - x - y - z = 0,$$

III. *On considère l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$(1 - p^2 - q^2)z^2 = 1,$$

où p et q désignent les dérivées partielles de la fonction inconnue z par rapport aux variables indépendantes x et y.

Déterminer une surface intégrale passant par la courbe dont les équations sont

$$x = 0, \qquad y^2 + z^2 = 1.$$

Épreuve pratique. — *Trouver pour la fonction*

$$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)},$$

le développement dont le théorème de Laurent démontre l'existence dans la partie du plan comprise entre les deux cercles

$$x^2 + y^2 = 1,$$
$$x^2 + y^2 = 4.$$

Mécanique rationnelle.

I. *Un disque circulaire homogène très mince de rayon a est assujetti à tourner autour d'un axe vertical passant par son centre et perpendiculaire à son plan avec une vitesse angulaire constante ω.*

En un de ses points, on pose une sphère homogène de rayon b qui peut rouler sur le plan du disque sans glissement et sans frottement.

Étudier le mouvement relatif de la sphère sur le plan du disque.

II. *Définir les courbes brachistochrones dans le plan lorsque le point matériel qui les décrit est soumis à*

l'action d'une force dérivant d'un potentiel. Montrer que la composante normale de la force est égale à la force centrifuge.

Applications. — 1° *La parabole est une courbe brachistochrone pour un point matériel qui la décrit sous l'action d'une force perpendiculaire à la directrice et variant en raison inverse du carré de la distance à cette directrice.*

2° *L'ellipse est une courbe brachistochrone pour un point qui la décrit sous l'action d'une force répulsive émanant d'un de ses foyers* F′ *et variant en raison inverse du carré de la distance de ce point à l'autre foyer* F.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

EPREUVE ÉCRITE. — *Le mouvement relatif de deux plans* A *et* B *se représente par le roulement de deux courbes, l'une* AB *dans le plan* A *et l'autre* BA *dans le plan* B′.

1° *On considère trois plans* A, B, C *glissant les uns sur les autres; connaissant le mouvement relatif de* A *et* C, *c'est-à-dire les deux roulettes* AC, CA *et la loi de leur roulement, connaissant de même le mouvement relatif de* B *et* C, *en déduire le mouvement relatif de* A *et* B.

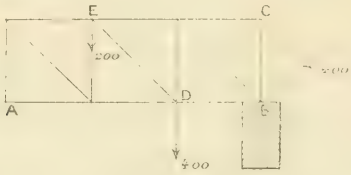
2° *Trouver de toutes les façons possibles une courbe* α *dans* A, *une courbe* β *dans* B *et une courbe* γ *dans* C, *de telle façon que* α *étant l'enveloppe de* γ *dans le plan* A *et* β *l'enveloppe de* γ *dans le plan* B, *les deux courbes* α *et* β *soient des profils conjugués dans le mouvement relatif de* A *et* B. *Cas où la courbe* γ *est absolument arbitraire.*

3° *Le mouvement relatif de* A *et* B *étant donné ainsi que deux courbes* α *et* β *constituant deux profils con-*

jugués, déterminer le mouvement du plan C *ainsi que la courbe* γ *de ce plan, de façon à engendrer* α *et* β *comme enveloppes de* γ. *Préciser les arbitraires qui entrent dans la solution générale.*

4° *Le mouvement des trois plans* A, B, C *étant défini de la façon suivante :* A *tourne autour d'un point fixe* ξ, B *tourne autour d'un point fixe* η *avec une vitesse constante* ω, C *se déplace de façon qu'une de ses droites glisse sur elle-même, enfin les deux roulettes* BA, BC *sont confondues en un cercle de rayon* R *ayant* η *pour centre, déterminer complètement les mouvements relatifs des trois plans ainsi que les courbes* α, β, γ.

Épreuve pratique. — *Une poutre articulée droite de hauteur constante est formée par des triangles rectangles isoscèles comme l'indique la figure.*



La poutre est placée horizontalement, le nœud A *étant fixé et le nœud* B *reposant sur un appui horizontal poli.*

Au nœud C *est appliquée une force égale à* 400^{kg} *et inclinée à* 45° *comme l'indique la figure. Le nœud* D *supporte une charge de* 400^{kg} *et le nœud* E *une charge de* 200^{kg}.

On néglige le poids propre du système. On demande :

1° *Épure donnant les réactions des deux appuis ;*

2° Épure donnant les tensions. Indiquer, sur la poutre, les barres comprimées par de gros traits.

Les deux épures seront faites séparément à l'échelle de 1^{cm} *par* 100^{kg} *pour la première et de* 2^{cm} *par* 100^{kg} *pour la seconde et l'on y joindra quelques indications très sommaires sur la méthode employée.*

Astronomie ou Mécanique céleste.

On donne les éléments suivants de l'orbite d'une planète, rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe moyens à une date connue t_0 *: demi-grand axe, excentricité, anomalie moyenne à la date* t_0*, longitude du nœud ascendant, inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique, longitude du périhélie.*

Faire connaître les formules à appliquer pour calculer les coordonnées polaires équatoriales héliocentriques à une autre date t.

On se bornera à écrire, sans les démontrer, celles de ces formules qui servent à calculer le rayon vecteur et l'anomalie vraie; on démontrera les autres. On insistera sur l'emploi des constantes de Gauss.

BIBLIOGRAPHIE.

Traité de nomographie. — Théorie des abaques. Applications pratiques; par M. *Maurice d'Ocagne*, ingénieur des Ponts et Chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique. 1 vol. in-8° de 480 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1899.

Dans le *Calcul par le trait* ou en *Statique graphique*, on obtient l'inconnue à l'aide d'une épure qu'il faut recommencer

toutes les fois que les données prennent d'autres valeurs. En Nomographie, la figure qui représente l'équation liant les données à l'inconnue reste, au contraire, la même, quelles que soient les valeurs attribuées aux données ; il suffit de la construire une fois pour toutes, et alors une simple lecture, sur un tableau qu'on nomme *abaque*, donne, sans aucune opération, le résultat cherché.

Le principe de la représentation plane des équations à deux variables remonte évidemment à l'époque de la création de la Géométrie analytique.

Pour les équations à trois variables, le premier essai de représentation plane est attribué à Pouchet (1795). Mais, malgré quelques tentatives faites par d'Obenheim, Piobert, Bellencontre, Allix, l'emploi des abaques est resté, pendant un demi-siècle, fort restreint. En 1843, lorsqu'on commença la construction de nos voies ferrées, la nécessité de méthodes rapides, pour évaluer les terrassements considérables que comportaient de tels travaux, amena nos ingénieurs, et plus particulièrement M. Lalanne, à chercher quel parti on pourrait tirer des méthodes graphiques; c'est à cette occasion que Lalanne découvrit le *principe de l'anamorphose* que M. Massau, dans son Mémoire sur l'intégration graphique, a porté, en 1884, à son plus haut degré de généralité.

La même année 1884 vit apparaître un mode plus général de représentation graphique des équations, auquel M. d'Ocagne avait été conduit en appliquant aux abaques de Lalanne une certaine transformation dualistique. Deux ans plus tard, M. l'ingénieur des Mines Lallemand fit connaître une forme particulière des abaques anamorphosés de Lalanne, à laquelle il attribua le nom d'*abaque hexagonal*, et qui s'applique à un type général d'équation que l'on rencontre très souvent dans la pratique.

La comparaison des divers travaux relatifs aux abaques donna en 1891, à M. d'Ocagne, l'heureuse idée de les coordonner et de créer une théorie nouvelle à laquelle il donna le nom de *Nomographie*. Nous avons eu à cette époque le plaisir de rendre compte dans les *Nouvelles Annales* (1) de cet Opuscule qui a été couronné en 1892 par l'Académie des Sciences.

(1) 3e série, t. X, p. 546.

Il y a loin de cette brochure, qui semblait chercher timidement à se faire jour, au beau Volume, cinq fois plus étendu, qui a la prétention, d'ailleurs justifiée, de renfermer la solution du problème pris dans le cas le plus général; c'est, en effet, un véritable corps de doctrine dans sa forme définitive.

Le problème le plus général, englobant *toutes les méthodes possibles de représentation plane des équations à un nombre quelconque de variables* fait l'objet du dernier Chapitre. L'auteur fait observer que c'est par là qu'il eût débuté s'il s'était adressé aux seuls mathématiciens. Mais, soucieux avant tout d'être utile à ceux qui s'occupent de choses techniques, il a préféré procéder du simple au composé, s'étendant davantage sur ce qui offre un intérêt pratique. Ajoutons que l'exposé des principes est accompagné d'exemples nombreux, variés, empruntés aux divers arts techniques (Génie civil ou militaire, Artillerie, Navigation, Géodésie, Finances, etc.). Ces exemples ont été soumis, pour la plupart, à l'épreuve de la pratique; ce sont en quelque sorte des exemples *vécus*.

Il nous reste maintenant à indiquer le but et le contenu de chaque Chapitre.

Le Chapitre I débute par une étude approfondie de la Notion primordiale des *échelles de fonctions* et de leur application aux abaques d'équations à deux variables.

Le Chapitre II concerne la représentation des équations à trois variables au moyen de trois systèmes de lignes cotées, trois lignes se correspondant dans ces systèmes quand elles concourent en un même point.

Sont compris dans cette catégorie des *abaques à entrecroisement :*

D'abord, les *abaques cartésiens*, tels que ceux de Pouchet, les premiers en date, et qui sont constitués par un système de lignes cotées sur quadrillage régulier; puis les *abaques anamorphosés*, dans lesquels la substitution, proposée par Lalanne, d'un quadrillage irrégulier à un quadrillage régulier permet de remplacer par des droites les courbes de l'abaque cartésien, et qui, dans le cas où ces droites sont parallèles, conduisent aux *abaques hexagonaux* de M. Lallemand; enfin, les abaques à trois systèmes de droites quelconques (*Anamorphose générale de M. Massau*), à propos desquels M. d'Ocagne montre l'heureux parti que l'on peut tirer du principe de l'homographie pour améliorer la disposition d'un abaque à droites entrecroisées.

Le Chapitre III est consacré à la méthode imaginée en 1884 par l'auteur et dont nous avons déjà parlé. Le principe de la *dualité*, appliqué à l'aide des *coordonnées* dites *parallèles*, a conduit M. d'Ocagne à un nouveau type auquel il attribue aujourd'hui la dénomination d'*abaques à points alignés* au lieu de celle d'*abaque à points isoplèthes* qu'il avait adoptée d'abord. Ces abaques offrent les plus grands avantages au point de vue de la rapidité de construction, de la facilité de lecture, de la précision d'interpolation, etc. Là encore, on peut utiliser l'homographie pour amener chaque abaque particulier à la forme la plus commode. L'abaque du n° 84, relatif aux murs de soutènement, offre un exemple frappant de l'heureuse influence de l'homographie.

Chacun des trois systèmes de points cotés entre lesquels se prennent les alignements constitue une *échelle graduée*. Le cas de deux échelles rectilignes parallèles et d'une échelle curviligne offre pour les applications une importance toute particulière; aussi l'auteur l'a-t-il traité avec tous les détails nécessaires et de nombreux exemples à l'appui. Comme il faut se borner, je me contenterai de signaler à l'attention des mathématiciens l'abaque relatif à l'équation de Kepler (n° 83).

Enfin, il faut encore compter à l'actif de ce Chapitre le curieux emploi des points alignés pour la représentation des lois empiriques. Parmi les exemples donnés à ce sujet, le plus remarquable est sans contredit celui qui est emprunté à M. Rateau, sur la consommation des machines à vapeur, où la construction même de l'abaque fait apparaître une loi physique dont rien ne faisait prévoir la forme *a priori*.

Il y a lieu aussi de citer divers types d'abaques pour plus de trois variables dérivant immédiatement des abaques précédents (abaques à double alignement de M. d'Ocagne; abaques à transversale quelconque de M. le capitaine Gœdseels; abaques à parallèles mobiles de M. Beghin).

Au Chapitre IV appartient la représentation simultanée de deux équations à quatre variables, chacune de ces équations renfermant trois de ces variables.

Une première application intéressante est celle qui concerne le calcul du *point à la mer*.

Mais, avant tout, ce Chapitre est une application générale et détaillée des principes précédents au calcul des profils de déblai et de remblai. Toutes les solutions connues de ce problème sont ramenées à un principe unique; aucune solution

particulière, pouvant être donnée, sous forme d'abaque, n'échappe à la solution générale développée par l'auteur et d'où il fait sortir de la façon la plus naturelle tous les procédés spéciaux proposés jusqu'ici, en particularisant d'une certaine façon quatre fonctions arbitraires qui figurent dans cette solution générale. Par l'examen comparatif des diverses solutions de ce problème important, l'auteur a fait ressortir, d'une manière incontestable, les avantages de la solution qui est fondée sur l'emploi des *points alignés* et qui a reçu tous les développements utiles.

Le Chapitre V est destiné à l'extension des modes de représentation précédemment étudiés au cas d'un nombre de variables supérieur à trois. Il n'existe plus alors de représentation applicable à une équation *quelconque;* il n'y a que des méthodes applicables à des types plus ou moins généraux comprenant à peu près toutes les équations que l'on rencontre dans la pratique. Ces modes de représentation reposent sur deux notions fondamentales, celle des *Éléments à plusieurs cotes* et celle des *Systèmes mobiles*. L'auteur examine, avec de nombreux exemples à l'appui, les types d'abaque les plus usuels dérivant de ce double emploi (abaques hexagonaux à échelles binaires de MM. Lallemand et Prévot; points alignés à deux cotes, c'est-à-dire doublement isoplèthes, de M. d'Ocagne; droites à doubles enveloppes de M. Poulain; trajectoires de contact de M. Paladini; règles à plusieurs tiroirs de M. Vaës; échelles tournantes de M. Lallemand; abaques à images logarithmiques de M. Mehmke). Citons enfin parmi les applications des points alignés à deux cotes, les abaques de la Trigonométrie sphérique (nos 123 et 124) et ceux des équations complètes du troisième et du quatrième degré (nos 125 et 126).

Le Chapitre VI et dernier contient, comme nous l'avons déjà dit, la théorie générale dont les résultats s'expriment d'une manière abrégée à l'aide d'une notation spéciale. L'auteur y montre comment les divers types d'abaques à deux, trois, quatre variables précédemment étudiés dérivent de cette théorie générale qui se trouve, au point de vue de la classification des modes de représentation graphique, avoir la même valeur que la théorie cinématique de Reuleaux au point de vue de la classification des mécanismes. Ce rapprochement fort judicieux a été signalé dans le journal anglais *Nature* (numéro du 17 janvier 1899).

L'auteur termine ce Chapitre en indiquant une source de pro-

blèmes dignes d'attirer l'attention des mathématiciens; il s'agit de déterminer pour chaque type d'abaque les caractères analytiques des équations correspondantes. Plusieurs géomètres ont déjà travaillé dans ce sens, et l'on rapporte ici les solutions données pour divers cas usuels par MM. de Saint-Robert, Massau, Lecornu, Duporcq et Kœnigs. L'exemple sera certainement suivi.

Ce compte rendu, quoique bien incomplet, montre cependant combien cet Ouvrage est touffu et riche en applications. Mais ce qu'il ne saurait mettre en évidence, c'est l'art avec lequel ce Traité est composé, c'est la clarté qui s'y trouve partout répandue comme à flots, c'est enfin la régularité parfaite de la méthode suivie. Sa lecture révèle à la fois l'œuvre d'un professeur habile et d'un savant accompli. EUGÈNE ROUCHÉ.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 360.

(1857, p. 56.)

NOTE

Par UN ABONNÉ.

L'énoncé, reproduit dans le numéro d'avril 1898, page 194, renferme une erreur typographique. Si O est foyer d'une section méridienne d'une quadrique de révolution, on a pour la distance du point O à un point de la quadrique

$$\rho = Ax + By + Cz + D;$$

si donc l'on considère cinq points de la quadrique, on a

$$OA \times \text{Vol. } BCDE + OB \times \text{Vol. } CDEA + \ldots = 0.$$

les volumes ayant des signes.

Question 448.

(1858, p. 359.)

NOTE

Par UN ABONNÉ.

L'énoncé, reproduit à la page 52 du numéro de janvier 1899, est inexact en plusieurs points. Il s'agit évidemment d'une

projection du théorème de cotes, pris dans les deux cas simples auxquels il donne lieu, et la question est alors trop facile pour que l'on doive insister.

Question 495.

(1859, p. 444.)

Une courbe C_n de degré n et une conique C_2 sont données dans le même plan; on prend la polaire d'un point quelconque situé sur C_n par rapport à la conique C_2; soient P *et* Q *les points d'intersection de cette polaire avec la conique : le lieu du point d'intersection des deux normales menées en* P *et* Q *à la conique est d'ordre* $3n$ *au plus.*

(DESBOVES.)

SOLUTION.

Par UN ABONNÉ.

Le fait énoncé résulte immédiatement des formules bien connues, données par M. Desboves,

$$X = \frac{c^2 x(b^2 - y^2)}{b^2 x^2 - a^2 y^2}, \qquad Y = \frac{-c^2 y(a^2 - x^2)}{b^2 x^2 - a^2 y^2},$$

qui expriment les coordonnées X et Y du point de rencontre des normales aux extrémités de la corde dont le pôle a pour coordonnées x et y : si le point (x, y) décrit une courbe d'ordre n, les points (X, Y) situés sur une droite donnée seront, en effet, les intersections de la courbe d'ordre n avec la cubique transformée de la droite par les formules ci-dessus. On a d'ailleurs facilement les formules ci-dessus en exprimant que l'hyperbole d'Apollonius relative au point (X, Y) et la conique donnée admettent pour corde commune la polaire du point (x, y) : on écrit pour cela que la conique $H + \lambda S = 0$ comprend cette droite; *voir* aussi SALMON, *Sections coniques*, n° 181, exercice 4.

Question 496.

(1859, p. 444.)

Par un point pris arbitrairement dans l'espace, on peut, en général, mener $\frac{mp(m-1)(p-1)}{2}$ *droites, dont chacune*

rencontre en deux points la ligne à double courbure résultant de l'intersection de deux surfaces algébriques d'ordres m et p; toutes ces droites sont sur un cône d'ordre $(m-1)(p-1)$.

Il suit de là que la perspective de l'intersection de deux surfaces d'ordres m et p a $\frac{mp(m-1)(p-1)}{2}$ *points doubles situés sur une courbe d'ordre* $(m-1)(p-1)$.

(MOUTARD.)

SOLUTION

Par M. G. FONTENÉ.

L'existence des $\frac{mp(m-1)(p-1)}{2}$ droites est démontrée dans le *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* de Salmon, n° 343 : on désigne par a, b, c, d les coordonnées tétraédriques du point donné O, et l'on écrit que les deux points (x, y, z, t) et $(x+\lambda a, y+\lambda b, \ldots)$ sont sur la courbe. Si l'on veut obtenir le cône de l'énoncé, il faut procéder autrement.

Soient les deux surfaces $f=0$, $\varphi=0$. L'origine O des coordonnées étant le point d'émission des droites, le point (x, y, z) appartiendra à l'une des droites cherchées si les deux équations en σ : $f\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{y}{\sigma}, \frac{z}{\sigma}\right)=0$, $\varphi\left(\frac{x}{\sigma}, \frac{y}{\sigma}, \frac{z}{\sigma}\right)=0$, ont *deux* racines communes; ces deux équations deviennent

$$f_0\sigma^m+f_1\sigma^{m-1}+\ldots=0, \qquad \varphi_0\sigma^p+\varphi_1\sigma^{p-1}+\ldots=0,$$

les f et les φ étant homogènes. Si l'on écrit d'abord que les deux équations ont une racine commune, on aura l'équation du cône C d'ordre mp qui a O pour sommet et la courbe gauche pour directrice : la méthode d'élimination d'Euler (méthode des polynomes multiplicateurs), ou la méthode dialytique de Sylvester, donnerait l'équation de ce cône par un déterminant d'ordre $m+p$. Pour écrire l'existence d'une seconde racine commune, nous emploierons la méthode des polynomes multiplicateurs, en tenant compte de ce que les deux équations ont déjà une racine commune : au lieu d'identifier complètement les deux équations

$$(A\sigma^{p-2}+B\sigma^{p-3}+\ldots)(f_0\sigma^m+f_1\sigma^{m-1}+\ldots)=0,$$

$$(G\sigma^{m-2}+H\sigma^{m-3}+\ldots)(\varphi_0\sigma^p+\varphi_1\sigma^{p-1}+\ldots)=0,$$

nous écrirons seulement que les premiers membres sont identiques à une constante près; comme ils sont nuls tous deux pour une même valeur de σ, cette constante sera nécessairement nulle. On a ainsi la condition

$$\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} p-1 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m-1 \end{array} \left|\begin{array}{ccccccccccccc} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & f_m & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f_0 & f_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & f_m & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_p & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \dots & \varphi_p & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right| = 0,$$

et cette relation nécessairement homogène représente un cône C′ d'ordre $(m-1)(p-1)$, comme le montre la considération du terme principal $(f_0)^{p-1} \times (\varphi_{p-1})^{m-1}$. Ce cône C′ a en commun avec le cône C des génératrices en nombre $mp \times (m-1)(p-1)$; mais les droites cherchées sont des génératrices doubles du cône C et leur nombre est la moitié du précédent; on voit pourquoi l'on a tenu à conserver la condition qui donne le cône C.

Une marche analogue à celle adoptée ici peut être employée quand on doit écrire que deux équations des degrés m et p ont k racines communes : on aurait k déterminants d'ordres $m+p$, $m+p-2$, $m+p-4$, ..., donnant des conditions qui ont pour points respectifs

$$mp, \quad (m-1)(p-1), \quad (m-2)(p-2), \quad \dots;$$

dans un espace analytique à un nombre quelconque de dimensions, cela permettrait de généraliser la question actuelle.

La méthode de Lagrange (*voir* la *Théorie des déterminants* de Baltzer, § XI, 9) conduirait pour la question actuelle à un cône d'ordre $m(p-1)$ ou à un cône d'ordre $(m-1)p$, au lieu du cône d'ordre $(m-1)(p-1)$ donné par la méthode d'Euler.

Question 1788.

(1898, p. 148.)

On considère, dans un cercle de centre O, *un rayon fixe* OA *et un rayon variable* OM. *Le point* M *se projette en* P *sur* OA. *Le lieu du centre des symédianes du triangle*

MOP *est une courbe fermée dont l'aire est le* $\frac{5}{32}$ *de l'aire du cercle.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

En prenant O pour origine et OA pour axe des x, les coordonnées rectangulaires du point de Lemoine K du triangle OMP sont données par

$$(1)\qquad \begin{cases} 2x = r\cos\theta(1 + \cos^2\theta), \\ 2y = r\sin\theta\cos\theta, \end{cases}$$

r étant le rayon du cercle et $< \mathrm{MOP} = \theta$; nous avons donc

$$4y\,dx = (3r^2\sin^4\theta - 4r^2\sin^2\theta\cos^2\theta)\,d\theta,$$

et le double de l'aire est

$$\mathrm{A} = 3r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta - 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 3r^2\frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2} - 4r^2\left(\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi r^2}{16} - \frac{4\pi r^2}{16} = \frac{5\pi r^2}{16}.$$

Observation. — En posant $\cos^2\theta = t$, les équations (1) donnent

$$4x^2 = r^2 t(1 - t^2),$$

$$4(x^2 + y^2) = r^2 t(1 + 3t),$$

et éliminant t, nous trouvons pour équation du lieu

$$(2)\qquad 4(x^2 + y^2)^3 - 4r^2(x^2 + y^2)^2 + r^2y^2(27x^2 - r^2) = 0.$$

Le lieu est une courbe du sixième ordre et deuxième genre, symétrique par rapport aux axes, ayant un tacnode à l'origine et l'axe des x pour tangente tacnodale; la courbe est bitangente au cercle donné, sur l'axe des x; a un rebroussement en chacun des points circulaires à l'infini, avec la droite à l'infini pour bitangente cuspidale, et deux points doubles isolés sur l'axe des y ($x = 0$, $y = \pm r : \sqrt{2}$); elle a enfin quatre points d'inflexions réels.

Le lieu de la projection de K sur le rayon OM est le *folium*

double

$$(3) \qquad (x^2+y^2)^3 = r^2x^4;$$

l'enveloppe de la droite | PK |, c'est-à-dire l'antipodaire de (3) par rapport au centre, est la sextique

$$(4) \qquad (x^2+y^2)^3 - r^2(x^4+20x^2y^2-8y^4)+16r^4y^2 = 0,$$

qui a aussi un tacnode à l'origine avec l'axe des x par tangente tacnodale, deux rebroussements aux points circulaires à l'infini et la droite à l'infini pour tangente double cuspidale; la courbe a en outre quatre rebroussements réels

$$(x = \pm 4r\sqrt{6} : 9,\ y = \pm 4r\sqrt{3} : 9)$$

et deux points doubles imaginaires sur l'axe des y.

La droite | MK | rencontre la perpendiculaire en O à | OM | en le pôle de | OP | par rapport au cercle ayant $\overline{OM}$ pour diamètre; les coordonnées de ce pôle étant évidemment

$$x = \frac{r}{2}\cos\theta, \qquad y = \frac{r}{2}\cos\theta\cot\theta,$$

nous avons, en éliminant θ, pour équation du lieu de ce point

$$(5) \qquad r^2y^2 = 4x^2(x^2+y^2),$$

qui représente un *cappa* dirigé vers l'axe des y et avec son tacnode à l'origine.

Autres solutions de MM. Droz-Farny et Lez.

QUESTIONS.

1834. Étant données deux coniques S et S', trouver le lieu d'un point P tel que l'on puisse mener de ce point une tangente à S et une tangente à S' perpendiculaires entre elles.

Montrer que ce lieu est une courbe C_8 du huitième ordre et du premier genre ayant les points cycliques pour points quadruples et huit points doubles à distance finie. On déterminera la position de ces derniers en montrant que ce sont les points communs à distance finie à trois courbes du quatrième ordre,

dont on formera les équations. On établira que les points multiples de C_8 et les foyers réels et imaginaires des deux coniques S et S′ sont sur une même courbe C_3 du troisième ordre qui dégénère en une hyperbole équilatère et la droite de l'infini, lorsque S et S′ sont concentriques. On donnera une définition géométrique de cette courbe C_3. Le lieu cherché C_8 est tangent en huit points à chacune des coniques données; les seize points de contact sont sur une même courbe du quatrième ordre.

Exprimer les coordonnées d'un point du lieu en fonction d'un paramètre.

Examiner les cas particuliers où l'une des coniques données se réduit à une parabole ou à un couple de droites.

(J. Franel.)

1835. Au bout de quel temps t, un capital C placé à intérêts simples à un taux r constitue-t-il une somme égale à celle que constituerait le même capital placé à intérêts composés au taux $r'(r' < r)$ pendant le même temps?

Exprimer t en fonction de r et r'. On admet que les deux sommes sont calculées d'après les formules respectives

$$C(1 + rt), \quad C(1 + r')^t.$$

(E.-M. Lémeray.)

1836. A quelle distance du centre d'une hyperbole équilatère doit-on mener une perpendiculaire à son axe réel pour que l'aire comprise entre les asymptotes, la courbe et la droite cherchée, ait une valeur donnée k. (E.-M. Lémeray.)

1837. Les deux triangles ABC, A′B′C′ sont homologiques des deux manières :

1° Centre O $\begin{vmatrix} ABC \\ A'B'C' \end{vmatrix}$, axe o;

2° Centre O′ $\begin{vmatrix} ABC \\ C'B'A' \end{vmatrix}$, axe o'.

Démontrer que si o passe par O′ : 1° o' passe par O; 2° les six points O, O′, ba', bc', $b'a$, $b'c$ sont les sommets d'un quadrilatère complet; 3° les six droites o, o', BA′, BC′, B′A, B′C sont les côtés d'un quadrangle complet; 4° le triangle diagonal du quadrangle, qui a pour sommets ba', bc', $b'a$, $b'c$, coïncide avec le trilatère diagonal du quadrilatère qui a pour côtés BA′, BC′, B′A, B′C. (G. Gallucci.)

[D3d]

UNE APPLICATION DE LA FORMULE DE STOKES;

PAR M. VOGT,
Professeur à l'Université de Nancy.

1. Dans le premier Volume de son *Cours d'Analyse*, M. Picard indique, après Kronecker, la solution du problème suivant :

Étant données deux équations algébriques ou transcendantes

$$F_1(x, y) = 0, \qquad F_2(x, y) = 0,$$

entre deux variables réelles, et à coefficients réels, déterminer le nombre des solutions de ce système d'équations comprises à l'intérieur d'un contour fermé donné.

On considère pour cela l'intégrale curviligne

$$I = \frac{1}{2\pi}\int d \operatorname{arc\,tang} \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{F_1\, dF_2 - F_2\, dF_1}{F_1^2 + F_2^2},$$

étendue au contour donné parcouru dans le sens positif, la valeur de cette intégrale est égale à l'excès du nombre des solutions intérieures au contour pour lesquelles le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}$$

est positif, sur le nombre de celles pour lesquelles il est négatif.

Je ne sais si l'on a déjà remarqué que ce résultat est susceptible d'une généralisation relative à la ligne d'in-

tersection de deux surfaces; c'est cette généralisation que je me propose d'indiquer ici, en suivant la marche de M. Picard.

Étant données deux équations

$$(1) \qquad F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0,$$

entre trois variables réelles, et à coefficients réels, elles définissent une certaine ligne réelle L formée d'une ou de plusieurs parties; nous supposons les fonctions F_1 et F_2 finies continues et uniformes dans une certaine région de l'espace, et nous considérons dans cette région un contour fermé C ne rencontrant pas la ligne L; nous formons l'intégrale curviligne

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_C d \operatorname{arc\,tang} \frac{F_2}{F_1},$$

étendue au contour C parcouru dans un certain sens, et nous nous proposons de chercher la signification de cette intégrale.

On peut l'écrire, en la développant, sous la forme

$$(2) \qquad I = \frac{1}{2\pi}\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

en posant

$$P = \frac{F_1 \dfrac{dF_2}{dx} - F_2 \dfrac{dF_1}{dx}}{F_1^2 + F_2^2},$$

$$Q = \frac{F_1 \dfrac{dF_2}{dy} - F_2 \dfrac{dF_1}{dy}}{F_1^2 + F_2^2},$$

$$R = \frac{F_1 \dfrac{dF_2}{dz} - F_2 \dfrac{dF_1}{dz}}{F_1^2 + F_2^2};$$

comme P, Q, R sont les dérivées partielles d'une même

fonction, elles satisfont aux conditions

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

que l'on vérifie du reste directement sans peine; on en conclut que I ne change pas de valeur lorsqu'on déforme le contour C sans passer par un point où P, Q, R deviennent discontinues, c'est-à-dire sans rencontrer la ligne L.

2. Supposons que par le contour C on fasse passer une calotte de surface S, que cette calotte soit simple et ait deux faces distinctes; prenons comme face supérieure ou positive la face sur laquelle doit être situé un observateur pour que, en s'approchant du contour C, il voie le sens d'intégration de gauche à droite, comme le sens du trièdre de coordonnées; la face inférieure ou négative sera la face opposée.

Si la calotte S ne rencontre pas la ligne L, le théorème de Stokes nous indique que l'intégrale I est égale à l'intégrale double

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{2\pi}\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dz\,dx \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy, \end{aligned} \right.$$

étendue à S, et cette intégrale est nulle.

Si la calotte rencontre la ligne L en des points A, B, ..., M, imaginons que l'on trace sur la surface des contours C_A, C_B, ..., C_M assez petits pour n'entourer chacun qu'un seul de ces points et pour ne couper ni C ni les autres contours; enlevons de S les portions S_A, S_B, ..., S_M intérieures à ces contours et réunissons les ouvertures ainsi pratiquées dans S au contour C par des coupures Γ_A, Γ_B, ..., Γ_M ne se coupant pas les unes les

autres; ces opérations ont pour effet de constituer une calotte S_1 à un seul contour ne contenant à son intérieur aucun point de L.

L'intégrale double (3), étendue à cette calotte S_1, est constamment nulle; mais, d'après la formule de Stokes, elle est égale à l'intégrale curviligne (2), étendue au contour entier de S_1; cette intégrale est donc nulle. Elle se compose de différentes parties étendues respectivement : 1° au contour C parcouru dans le sens adopté primitivement sur ce contour; 2° aux deux bords de chacune des coupures $\Gamma_A, \Gamma_B, \ldots, \Gamma_M$, ces bords étant parcourus l'un dans un sens, l'autre, qui lui est opposé, dans le sens contraire; les parties d'intégrale relatives à ces bords sont deux à deux égales et de signes contraires et ont une somme nulle; 3° aux contours $C_A, C_B, \ldots, C_M$ parcourus dans le même sens que le contour C relativement à la calotte S_1; les parties d'intégrale correspondantes sont égales et de signes contraires à celles que l'on obtiendrait si les contours étaient parcourus dans le sens opposé, et ce dernier sens est celui que l'on doit adopter si l'on veut que les faces supérieures des calottes partielles $S_A, S_B, \ldots, S_M$ coïncident avec la face supérieure de la calotte totale S. Si donc on adopte pour tous les contours $C, C_A, C_B, \ldots, C_M$ le sens pour lequel les faces supérieures des calottes $S, S_A, S_B, \ldots, S_M$ soient les mêmes et si l'on appelle $I, I_A, I_B, \ldots, I_M$ les valeurs de l'intégrale I étendue à ces contours, on aura

$$I = I_A + I_B + \ldots + I_M;$$

tout revient donc à évaluer chacune des intégrales du second membre.

3. Considérons l'une d'elles, par exemple la première : soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A; la tan-

gente à la ligne L en ce point a pour équations

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y_0}(y - y_0) + \frac{\partial F_1}{\partial z_0}(z - z_0) = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y_0}(y - y_0) + \frac{\partial F_2}{\partial z_0}(z - z_0) = 0;$$

en désignant par D_1, D_2 et D_3 les déterminants

$$D_1 = \frac{\partial F_1}{\partial y_0}\frac{\partial F_2}{\partial z_0} - \frac{\partial F_2}{\partial y_0}\frac{\partial F_1}{\partial z_0},$$

$$D_2 = \frac{\partial F_1}{\partial z_0}\frac{\partial F_2}{\partial x_0} - \frac{\partial F_2}{\partial z_0}\frac{\partial F_1}{\partial x_0},$$

$$D_3 = \frac{\partial F_1}{\partial x_0}\frac{\partial F_2}{\partial y_0} - \frac{\partial F_2}{\partial x_0}\frac{\partial F_1}{\partial y_0},$$

que nous ne supposerons pas nuls simultanément, on voit que les cosinus directeurs de la tangente sont donnés par les équations

$$(1) \qquad \frac{\cos\alpha}{D_1} = \frac{\cos\beta}{D_2} = \frac{\cos\gamma}{D_3} = \pm\frac{1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}};$$

nous appellerons demi-tangente positive à la ligne L en A celle des deux directions précédentes qui correspond au signe + devant le radical.

Nous supposons que la calotte S et, par suite, la calotte S_A qui en fait partie ne sont pas tangentes en A à la ligne L; le contour C_A, qui limite S_A, peut être choisi aussi petit que l'on veut; on peut sans inconvénient supposer que ce contour est une petite courbe plane et que S_A est la portion du plan de cette courbe qui lui est intérieure.

Les coordonnées des points du contour C_A auront des expressions de la forme

$$x = x_0 + \varepsilon\xi, \qquad y = y_0 + \varepsilon\eta, \qquad z = z_0 + \varepsilon\zeta,$$

ε étant une quantité fixe que l'on peut prendre aussi petite que l'on veut, ξ, η, ζ étant fonctions d'un même

paramètre; l'intégrale I_A s'exprimera au moyen de ce paramètre par une somme de deux parties, l'une indépendante de ε et l'autre s'annulant avec cette dernière quantité. Comme nous avons remarqué au début que la valeur de I ou de I_A ne change pas lorsqu'on modifie le contour sans franchir la ligne L, nous concluons que l'intégrale actuelle ne doit pas varier avec ε; la seconde partie, qui peut être rendue aussi petite qu'on veut, est donc rigoureusement nulle et I_A se réduit à la première; elle est, toutes réductions faites,

$$I_A = \frac{1}{2\pi}\int_{C_A} \frac{D_1(\eta\, d\zeta - \zeta\, d\eta) + D_2(\zeta\, d\xi - \xi\, d\zeta) + D_3(\xi\, d\eta - \eta\, d\xi)}{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial F_1}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial F_1}{\partial z_0}\zeta\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_0}\xi + \frac{\partial F_2}{\partial y_0}\eta + \frac{\partial F_2}{\partial z_0}\zeta\right)^2}.$$

Nous choisirons comme contour C_A une ellipse tracée sur un cylindre ayant pour axe la tangente à la ligne L, et dont l'équation est

$$\left[\frac{\partial F_1}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial F_1}{\partial y_0}(y - y_0) + \frac{\partial F_1}{\partial z_0}(z - z_0)\right]^2$$
$$+ \left[\frac{\partial F_2}{\partial x_0}(x - x_0) + \frac{\partial F_2}{\partial y_0}(y - y_0) + \frac{\partial F_2}{\partial z_0}(z - z_0)\right]^2 = \varepsilon^2;$$

nous assujettissons de cette façon ξ, η, ζ à rendre égal à l'unité le dénominateur de la fraction différentielle; nous remarquons, de plus, que les parenthèses qui entrent au numérateur sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale extérieure à la calotte S_A au point A; si α', β', γ' sont les angles de cette normale avec les axes de coordonnées, on a

$$\frac{\cos\alpha'}{\eta\, d\zeta - \zeta\, d\eta} = \frac{\cos\beta'}{\zeta\, d\xi - \xi\, d\zeta} = \frac{\cos\gamma'}{\xi\, d\eta - \eta\, d\xi}$$
$$= + \frac{1}{\sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) - (\xi\, d\xi + \eta\, d\eta + \zeta\, d\zeta)^2}}.$$

En considérant pour un instant ξ, η, ζ comme les

coordonnées des points d'une courbe plane dont les coordonnées polaires sont ρ et θ, on aura pour valeur du radical

$$\sqrt{\rho^2 ds^2 - \rho^2 d\rho^2} = \rho^2 d\theta,$$

de sorte que l'on a

$$(5) \qquad \begin{cases} \eta\, d\zeta - \zeta\, d\eta = \rho^2 d\theta \cos\alpha', \\ \zeta\, d\xi - \xi\, d\zeta = \rho^2 d\theta \cos\beta', \\ \xi\, d\eta - \eta\, d\xi = \rho^2 d\theta \cos\gamma'; \end{cases}$$

en désignant enfin par V l'angle aigu ou obtus formé par la demi-tangente positive à la ligne L et la normale extérieure à la calotte S_A en A, on a, en tenant compte des formules (4) et (5),

$$I_A = \frac{1}{2\pi} \int_{C_A} \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2} \cos V \rho^2 d\theta.$$

L'intégrale

$$\int_{C_A} \rho^2 d\theta$$

est égale au double de l'aire de l'ellipse C_A; mais cette aire peut s'évaluer d'une autre manière, car son plan fait l'angle V avec le plan de section droite du cylindre, et l'aire de cette section droite est égale à

$$\frac{\pi}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}};$$

on a donc

$$\int_{C_A} \rho^2 d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}} \frac{1}{|\cos V|},$$

d'où

$$I_A = \frac{\cos V}{|\cos V|}.$$

Nous voyons que l'intégrale I_A est égale à $+1$ ou à -1, suivant que l'angle V est aigu ou obtus; en faisant

la somme de toutes les intégrales analogues, nous arrivons au résultat suivant :

Étant donnés un contour C *et l'intégrale* I *prise sur ce contour dans un certain sens, imaginons par ce contour une calotte quelconque* S *qui rencontre la ligne* L *en un ou plusieurs points; l'intégrale* I *est égale à l'excès du nombre des points de rencontre où la normale extérieure à* S *et la demi-tangente positive à* L *font entre elles un angle aigu sur le nombre de ces points où elles font un angle obtus.*

Lorsque les surfaces représentées par les équations (1) sont des cylindres parallèles à Oz et que le contour C est tracé dans le plan des xy, on retrouve, en prenant pour S la surface plane intérieure à C, le résultat de Kronecker et de M. Picard.

4. Nous terminerons par quelques remarques qui peuvent faciliter l'application de la proposition précédente. Considérons sur la ligne L une portion L_1 continue et ne renfermant aucun point singulier, c'est-à-dire aucun point pour lequel les déterminants fonctionnels D_1, D_2 et D_3 s'annulent simultanément; cette portion L_1 peut avoir la forme d'un contour fermé, ou s'étendre à l'infini dans un sens ou dans les deux sens; si l'on choisit sur L_1 un certain sens de mouvement, qui sera par exemple celui des arcs croissants, je dis que la demi-tangente positive sera toujours dirigée de la même manière en tous les points de L_1, c'est-à-dire sera toujours confondue avec la demi-tangente dans le sens du mouvement, ou toujours avec la demi-tangente opposée.

Cela résulte immédiatement de ce que D_1, D_2 et D_3 ne s'annulent pas à la fois; si l'on prend comme variable l'arc s de L_1 et si l'on suppose que les coordon-

nées des points de L_1 en sont des fonctions continues et uniformes, on a constamment

$$\frac{\frac{dx}{ds}}{D_1} = \frac{\frac{dy}{ds}}{D_2} = \frac{\frac{dz}{ds}}{D_3} = \pm \frac{1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}};$$

comme le radical ne s'annule pas et que les termes des rapports sont des fonctions continues, le signe du radical ne peut changer; il suffit par suite de le déterminer en un point de L_1 pour l'avoir en tous les autres.

Une autre remarque est la suivante : Supposons que l'on déforme les surfaces F_1 et F_2 et, par suite, la ligne L, mais sans rencontrer le contour C; imaginons pour cela que les fonctions F_1 et F_2 dépendent d'un paramètre α et que l'on fasse varier ce paramètre; je dis que l'intégrale I conserve la même valeur tant que la ligne L ne vient pas couper le contour d'intégration.

Considérons deux valeurs α et $\alpha + \Delta\alpha$ du paramètre, et les valeurs correspondantes I et $I + \Delta I$ de l'intégrale curviligne étendue au contour C; on a

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi}\int_C d \operatorname{arc\,tang} \frac{F_2(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha)}{F_1(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha)} - d \operatorname{arc\,tang} \frac{F_2(x, y, z, \alpha)}{F_1(x, y, z, \alpha)},$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_C d \operatorname{arc\,tang} \frac{F_2(\alpha + \Delta\alpha) F_1(\alpha) - F_1(\alpha - \Delta\alpha) F_2(\alpha)}{F_1(\alpha + \Delta\alpha) F_1(\alpha) + F_2(\alpha - \Delta\alpha) F_2(\alpha)};$$

la fraction qui entre sous le signe arc tang a un dénominateur qui diffère de $F_1^2 + F_2^2$ d'une quantité s'annulant avec $\Delta\alpha$; comme $F_1^2 + F_2^2$ n'est pas nul, on peut supposer que $\Delta\alpha$ est assez petit pour que le dénominateur de la fraction reste positif pour les valeurs de x, y, z correspondant à tous les points du contour d'intégration C; supposons qu'à l'origine de ce contour on prenne pour valeur de l'intégrale indéfinie arc tang celle qui est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, et qu'on suive

la variation de cet arc tout le long de C; la tangente ne devenant pas infinie, la valeur finale est comprise entre les mêmes limites que la valeur initiale et lui est identique; on a donc $\Delta I = 0$. On peut ainsi, de proche en proche, passer d'une première position de L à une autre sans que I cesse de garder la même valeur, ce que nous voulions démontrer.

5. Comme application de ces remarques, nous allons considérer la ligne d'intersection d'un ellipsoïde

$$F_1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et d'une sphère

$$F_2 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0;$$

nous supposons que l'on ait

$$a > R > b > c,$$

de telle sorte que L soit constituée par deux parties fermées entourant l'axe des x et situées de part et d'autre du plan des yz; prenons comme contour C une portion de l'axe des x allant du point d'abscisse $-a$ à celui d'abscisse a, complétée par une demi-circonférence de rayon a dans un plan quelconque, que l'on peut sans inconvénient supposer celui des xy. Je vais montrer que l'intégrale I est nulle, bien que toute calotte passant par le contour C coupe L en deux points au moins.

En appliquant la première remarque, on est amené à chercher les signes des déterminants D_1, D_2, D_3 en un point de chacune des parties de L, par exemple en un point situé dans le plan des xy; on a alors, si $x_0, y_0, 0$ sont les coordonnées de ce point

$$D_1 = 0, \qquad D_2 = 0, \qquad D_3 = x_0 y_0 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right),$$

de façon que D_3 est négatif si x_0 et y_0 sont positifs; on en conclut que pour la portion de L, située du côté des x positifs, la demi-tangente positive est dirigée dans le sens du mouvement qui va de la portion positive du plan des xz à la portion positive du plan des xy; pour l'autre partie de L, la demi-tangente positive a une direction opposée. On en conclut facilement que l'intégrale I est nulle.

Cela résulte encore plus simplement de la deuxième remarque; supposons que l'on fasse diminuer le rayon de la sphère d'une manière continue; la ligne L se déforme, passe par une position où elle se compose de deux cercles, puis est formée de deux parties entourant Oz, et finit par disparaître sans rencontrer le contour C. L'intégrale I ne change pas, et comme elle est nulle pour $R < c$, elle est nulle pour $a < R < b$.

[O4a]

SYMÉTRIE ORTHOGONALE PAR RAPPORT A UN CYLINDRE QUELCONQUE;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI, à Parme.

§ I.

Deux points A, A_1 sont *symétriques* par rapport à un cylindre K (*cylindre ichnographique*) quand la droite AA_1 est normale à la surface de K et qu'en outre elle est partagée en deux parties égales par cette surface.

Deux figures F, F_1 sont *symétriques*, quand une d'elles est le lieu des symétriques des points de l'autre.

A une figure F peuvent correspondre une ou plusieurs

figures réelles ou imaginaires F_1. Cela tient à ce qu'un point A a autant de symétriques A_1 que le cylindre K a de normales passant par A.

Si la figure donnée est une ligne L, le lieu des pieds des normales au cylindre K, menées des points de L, est une autre ligne Λ qu'on appelle la *projection orthogonale de* L *sur le cylindre.*

Problème. — *On donne le cylindre ichnographique* K *et la figure primitive* F; *déterminer la figure symétrique* F_1.

Si $A(x, y, z)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_0(\xi, \eta, \zeta)$ sont trois points correspondants de F, F_1, K, la condition que la droite AA_1 soit normale à K est exprimée par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} (x - \xi)\xi' + (y - \eta)\eta' = 0, \\ z = \zeta. \end{cases}$$

D'ailleurs, puisque

$$(2) \qquad \xi = \frac{x + x_1}{2}, \qquad \eta = \frac{y + y_1}{2}, \qquad \zeta = z = z_1,$$

on a

$$(3) \qquad x_1 = 2\xi - x, \qquad y_1 = 2\eta - y, \qquad z_1 = \zeta = z.$$

Puisqu'on peut regarder ξ, η comme des fonctions d'un paramètre τ, et x, y, z comme des fonctions d'un paramètre t, ou de deux paramètres indépendants u, v, suivant que la figure F est une ligne ou une surface, on voit que la figure symétrique F_1 est, dans tous les cas, définie par les équations (3), pourvu qu'on y élimine un des deux paramètres t, τ, ou bien un des trois paramètres u, v, τ au moyen de la première équation (1).

La projection orthogonale d'une ligne L sur le cy-

lindre K est représentée par les équations qu'on dérive des relations (2), en y éliminant l'un des paramètres t, τ, comme on vient de dire.

La figure F *est une ligne* L. — Soient

$$\eta = \varphi(\xi), \qquad y = f(x)$$

les équations cartésiennes de la section droite du cylindre K et de la projection de la ligne objective L sur le plan $z = 0$.

En ayant recours aux égalités (3), (1), on trouve que la ligne symétrique L_1 est définie par les équations

$$x_1 = 2\xi - x, \qquad y_1 = \varphi(\xi) + \frac{x - \xi}{\varphi'(\xi)}, \qquad z_1 = z,$$

quand on emploie la relation

$$x + f(x)\varphi'(\xi) = \xi + \varphi(\xi)\varphi'(\xi),$$

pour y éliminer x ou ξ.

On peut effectuer l'élimination quand L est sur un plan parallèle à l'axe des z.

En supposant, en effet, $x = k$ (ce qu'on peut faire sans nuire à la généralité), la ligne symétrique L_1 est placée sur le cylindre dont la section droite est la courbe

$$y_1 = \varphi\left(\frac{x_1 + k}{2}\right) + \frac{k - x_1}{2\varphi'\left(\frac{x_1 + k}{2}\right)}.$$

Remarque. — Les calculs précédents restent les mêmes si, au lieu d'une ligne gauche L, on a un cylindre C dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z. La figure symétrique est, dans ce cas, un autre cylindre C_1 ayant même direction que C.

La figure F *est une surface* S. — Soit

$$z = F(x, y)$$

l'équation cartésienne de S.

Comme l'équation (1) donne dans ce cas

$$y = \varphi(\xi) - \frac{x - \xi}{\varphi'(\xi)},$$

en se rappelant les égalités (3), on trouve que *la surface symétrique* S_1 *est représentée par les équations*

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = 2\xi - x, \qquad y_1 = \varphi(\xi) + \dfrac{x - \xi}{\varphi'(\xi)}, \\ z_1 = F\left[x, \varphi(\xi) - \dfrac{x - \xi}{\varphi'(\xi)}\right], \end{cases}$$

dans lesquelles x et ξ doivent être regardés comme deux paramètres indépendants.

Remarque. — Ce théorème n'est pas applicable quand S est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z. Mais dans ce cas on peut mettre à profit la remarque précédente.

§ II.

Exemples. — 1. La figure objective est une droite. Puisqu'on peut prendre

$$x = 0, \qquad y = t \sin\theta, \qquad z = t \cos\theta$$

(θ étant une constante) sans nuire à la généralité, la première condition (1) donne

$$t = \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\eta' \sin\theta}.$$

La droite donnée L a donc pour symétrique L_1 la courbe

$$(5) \quad x_1 = 2\xi, \qquad y_1 = \frac{\eta\eta' - \xi\xi'}{\eta'}, \qquad z_1 = \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\eta'} \cot\theta,$$

et pour projection orthogonale sur le cylindre K la ligne A, qu'on obtient en portant sur les génératrices de

celui-ci des hauteurs $\zeta(=z_1)$ données par la troisième égalité (5).

En supposant

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = k$$

(α, β, γ, k étant des constantes), les équations (5) donnent

$$2\alpha\xi\eta' + \beta(\eta\eta' - \xi\xi') + \gamma\cot\theta(\xi\xi' + \eta\eta') = k\eta'.$$

Cette équation, bien qu'elle ne soit pas intégrable dans le cas général, démontre que, sous certaines conditions, une droite peut avoir une symétrique plane.

Si $\alpha = 0$, on a, l'intégration étant effectuée,

$$(\gamma\cot\theta - \beta)\xi^2 + (\gamma\cot\theta + \beta)\eta^2 - 2k\eta = h \qquad (h = \text{const.}).$$

Donc, *si la ligne symétrique d'une droite est sur un plan perpendiculaire au plan déterminé par la droite donnée et la direction des génératrices du cylindre ichnographique, la section droite de celui-ci est une conique à centre.*

En supposant

$$\zeta = z_1 = a\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

($a =$ const.), la troisième équation (5) donne par intégration

$$\xi^2 + \eta^2 = (a\,\text{tang}\,\theta.\eta + b)^2.$$

Par conséquent, *si la projection orthogonale* A *d'une droite* L *sur un cylindre* K *s'obtient en portant sur les génératrices des distances proportionnelles aux rayons vecteurs* R *de la section droite de* K, *cette section droite est une conique à centre. L'origine des rayons vecteurs* R *est au centre de cette conique.*

Quand on donne arbitrairement le cylindre K, *on peut tracer sur sa surface une ligne* A *sous des con-*

ditions telles qu'elle soit la projection orthogonale d'une certaine droite.

En effet, supposons que l'on ait

$$(6) \qquad \xi = \varphi(\sigma) \qquad \eta = \int \sqrt{1 - \varphi'^2(\sigma)}\, d\sigma,$$

σ étant l'arc de la section droite A_0 de K.

En remarquant que le rayon de courbure de A_0 est donné par l'égalité

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varphi''(\sigma)}{\sqrt{1 - \varphi'^2(\sigma)}},$$

on déduit de là

$$\varphi(\sigma) = \int \sin\left(k + \int \frac{d\sigma}{\rho}\right) d\sigma + h,$$

k et h étant deux constantes arbitraires.

De plus, la troisième égalité (5) donne

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta &= \left[\int \sqrt{1 - \varphi'^2(\sigma)}\, d\sigma + \frac{\varphi(\sigma)\varphi'(\sigma)}{\sqrt{1 - \varphi'^2(\sigma)}} \right] \cot\theta \\ &= \left\{ \int \cos\left(k + \int \frac{d\sigma}{\rho}\right) d\sigma + \operatorname{tang}\left(k + \int \frac{d\sigma}{\rho}\right) \right. \\ &\qquad \left. \times \left[\int \sin\left(k + \int \frac{d\sigma}{\rho}\right) d\sigma + h \right] \right\} \cot\theta. \end{aligned} \right.$$

Pour construire la ligne A dont on vient de parler, il suffit donc de plier, sur le cylindre K, le plan de la ligne L_0 représentée par la première ou par la deuxième équation (7), suivant que la section droite A_0 du cylindre K est définie par les équations (6) ou par l'équation intrinsèque $\rho = \rho(\sigma)$.

Si, par exemple, la section droite de K est une chaînette ou un cercle, on a respectivement

$$\varphi(\sigma) = \sqrt{a^2 + \sigma^2}, \qquad \rho = a.$$

La détermination de A se fait donc par la construction indiquée, en opérant sur les lignes planes L_0 représen-

tées respectivement par les équations cartésiennes :

$$\zeta = \left(a \log \frac{\sqrt{a^2+\sigma^2}+\sigma}{a} + \frac{\sigma\sqrt{a^2+\sigma^2}}{a}\right)\cot\theta,$$

$$\zeta = h\cot\theta.\tang\left(k+\frac{\sigma}{a}\right).$$

2. Si la section droite du cylindre K est la parabole

$$\eta = \varphi(\xi) = \frac{\xi^2}{a},$$

et si la surface objective S est le plan

$$z = F(x, y) = mx,$$

passant par l'axe de la parabole précitée, l'élimination des deux paramètres x, ξ entre les égalités (4) conduit à l'équation

$$4am^2y_1(mx_1+z_1) = (mx_1+z_1)^3 - 2a^2m^2(mx_1-z_1).$$

Celle-ci démontre que *le plan donné a pour symétrique une surface algébrique du troisième ordre.*

§ III.

Quand on donne le cylindre ichnographique K et la ligne A, projection orthogonale d'une ligne inconnue L, on peut déterminer cette ligne et sa symétrique L_1 d'une infinité de manières, car la seule condition à vérifier, c'est que les lignes L, L_1 soient sur la surface réglée Σ lieu des normales au cylindre K le long de A. Si l'on a recours à la première condition (1), et si l'on remarque, de plus, que pour chaque point de Σ on a $z = \zeta$, on peut énoncer ce théorème :

La surface réglée Σ à plan directeur, ayant la ligne $\xi = \lambda(\zeta)$, $\eta = \mu(\zeta)$ pour trajectoire orthogonale

de ses génératrices, est représentée par l'équation

$$[x - \lambda(z)]\lambda'(z) + [y - \mu(z)]\mu'(z) = 0.$$

On voit par là que, si la ligne A est de l'ordre n, la surface réglée Σ est de l'ordre $2n - 1$.

§ IV.

Problème. — *On demande de déterminer d'abord les conditions sous lesquelles on doit prendre deux figures* F, F_1 *pour que celles-ci puissent être considérées comme deux figures symétriques par rapport à un cylindre, et ensuite de trouver un tel cylindre.*

Premier cas. — *Les figures données sont deux lignes* L, L_1.

Ces lignes L, L_1 ne peuvent pas être tracées d'une façon absolument arbitraire.

En effet, si l'on suppose que les génératrices du cylindre ichnographique soient parallèles à l'axe des z, menons une suite de droites parallèles au plan $z = 0$ et s'appuyant aux deux courbes L, L_1; la correspondance entre les points de celles-ci est alors fixée complètement. Conséquemment on ne peut pas assujettir les droites AA_1, joignant les couples de points correspondants des lignes L, L_1, à la condition d'être normales au cylindre K (passant par les milieux des segments AA_1 et ayant les génératrices parallèles à l'axe des z.

On peut cependant démontrer qu'*on peut prendre arbitrairement une des lignes* L, L_1 *et le cylindre sur lequel l'autre doit être placée.*

Si, en effet, L_0, L_{10} sont les projections des lignes L, L_1 sur le plan $z = 0$, supposons qu'on prenne L et L_{10} d'une façon arbitraire.

Le problème proposé est résolu dès qu'on a déterminé la loi de correspondance entre les points A_0, A_{10} des lignes L_0, L_{10}. Car il suffit alors de mener des parallèles aux droites A_0, A_{10} par les points de L. Ces parallèles vont couper le cylindre, dont L_0 est la section droite, suivant la ligne L_1 symétrique de L.

On voit donc que la seule condition qu'on doit exprimer est que la ligne A_0, lieu des milieux des segments A_0, A_{10}, est une trajectoire orthogonale de ces droites. Or, les cosinus directeurs des segments $A_0 A_{10}$ et ceux de la tangente à A_0 sont proportionnels respectivement aux différences

$$x - x_1, \qquad y - y_1,$$

et aux quantités

$$d(x + x_1), \qquad d(y + y_1).$$

La condition à vérifier est donc la suivante

$$(8) \qquad (x - x_1)(dx + dx_1) + (y - y_1)(dy + dy_1) = 0.$$

Et comme celle-ci est réductible à une relation différentielle entre les paramètres t, t_1, en fonction desquels on peut supposer que soient exprimés (x, y) et (x_1, y_1) respectivement, la détermination de la loi de correspondance dont on vient de parler est ramenée à l'intégration de l'équation (8).

Remarque. — Si l'on exprime les variables x, y, x_1, y_1 en fonction de ξ et η, en ayant recours aux égalités (2) et aux équations

$$y = F(x), \qquad y_1 = F_1(x_1),$$

des lignes données L_0, L_{10}, l'équation (8) se réduit à une relation différentielle entre ξ, η.

L'intégration de celle-ci définit la ligne A_0 et consé-

quemment le cylindre K. A ce point, le problème doit être regardé comme résolu.

§ V.

Exemple. — *La ligne donnée* L *et la ligne* L_1 *sont sur deux plans* Π, Π_1 *parallèles à l'axe des* z.

Si l'on suppose que Π soit le plan coordonné $y = 0$ et que Π_1 passe par l'axe des z et soit incliné de l'angle θ sur Π, on a

$$x = t, \qquad y = 0, \qquad x_1 = t_1 \cot\theta, \qquad y_1 = t_1.$$

La première méthode conduit à l'équation différentielle

$$(9) \quad \sin\theta(t\sin\theta - t_1\cos\theta)\,dt + (t\sin\theta\cos\theta - t_1)\,dt_1 = 0,$$

qu'on ne sait pas intégrer dans le cas général.

Quant à la deuxième méthode, si l'on remarque que

$$y_1 = 2\eta, \qquad x_1 = 2\eta\cot\theta, \qquad x = 2\xi - x_1 = 2\xi - 2\eta\cot\theta,$$

on arrive à l'équation différentielle

$$\xi\,d\xi - \eta\,d\eta - 2\cot\theta.\eta\,d\xi = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$\begin{aligned}(\xi^2 - 2\xi\eta.\cot\theta - \eta^2)[\sin\theta.\xi + (1-\cos\theta)\eta]^{\cos\theta} \\ = c\,[\sin\theta.\xi - (1+\cos\theta)\eta]^{\cos\theta},\end{aligned}$$

c étant une constante arbitraire.

En décomposant le trinôme

$$\xi^2 - 2\xi\eta.\cot\theta - \eta^2,$$

en facteurs linéaires, on peut donner à l'équation ci-dessus la forme

$$(10) \quad [\xi\sin\theta + (1-\cos\theta)\eta]^{1+\cos\theta}[\xi\sin\theta - (1+\cos\theta)\eta]^{1-\cos\theta} = c.$$

Celle-ci définit la section droite du cylindre K; l'indétermination de c nous apprend que le problème proposé est résoluble d'une infinité de manières.

Remarque. — La surface symétrique du plan Π par rapport au cylindre K qu'on vient de déterminer est l'autre plan Π_1.

Cas particulier. — Quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'équation (9) se réduit à cette autre :

$$t_1\, dt_1 = t\, dt;$$

d'où, par intégration,

$$t_1 = \sqrt{t^2 - 4c},$$

c étant une constante arbitraire.

Il en résulte alors

$$\xi = \frac{x + x_1}{2} = \frac{t}{2}, \qquad \eta = \frac{y + y_1}{2} = \frac{\sqrt{t^2 - 4c}}{2}$$

et

$$\xi^2 - \eta^2 = c. \tag{11}$$

Cette équation peut aussi se déduire de l'égalité (10), en y supposant $\theta = \frac{\pi}{2}$.

L'analyse précédente démontre que :

Si la ligne L *du plan* $y = 0$, *représentée par l'équation* $z = f(x)$, *a pour symétrique une ligne* L_1 *du plan* $x = 0$:

1° *Le cylindre ichnographique* K *a pour section droite une hyperbole équilatère quelconque* (11), *dont les asymptotes sont les axes coordonnés.*

2° *La ligne* L_1 *est représentée par l'équation*

$$z_1 = f(\sqrt{y_1^2 + 4c}).$$

Si, par exemple, on suppose successivement

$$z = f(x) = \left(\alpha x + \beta,\ \sqrt{\alpha x^2 + \beta},\ \frac{x^2}{a},\ \sqrt{ax},\ \ldots\right),$$

on a respectivement

$$(z_1 - \beta)^2 - \alpha^2 y_1^2 = 4\alpha^2 c, \qquad z_1^2 - \alpha y_1^2 = 4\alpha c + \beta,$$
$$z_1 - \frac{4c}{a} = \frac{y_1^2}{a}, \qquad z_1^4 = a^2(y_1^2 + 4c), \qquad \ldots.$$

Donc : *Quand* L *est une droite, ou une conique à centre, ou une parabole dont l'axe coïncide avec l'axe des* z, *ou une parabole dont l'axe coïncide avec l'axe des* x, *la ligne symétrique* L_1 *est respectivement une conique à centre, une conique à centre, une parabole dont l'axe coïncide avec l'axe des* z, *une ligne du quatrième ordre.*

§ VI.

Second cas. — *Les figures données sont deux surfaces* S, S_1.

Quelles que soient ces surfaces, on peut les représenter par les équations

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = \varphi(u, v), \\ z = \psi(v), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = F(t, v), \\ y_1 = \Phi(t, v), \\ z_1 = \Psi(v), \end{cases}$$

u et v étant deux paramètres indépendants et t un troisième paramètre qu'on doit regarder comme une fonction (inconnue) de u et v.

Puisque la condition $z_1 = z$ est remplie quelle que

soit la valeur des paramètres u et v, il ne nous reste qu'à vérifier les deux conditions suivantes :

a. Que le lieu des milieux A_0 des segments AA_1, joignant les couples de points correspondants A, A_1 des surfaces S, S_1, est un cylindre K dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z.

b. Que les droites AA_1 sont normales à ce cylindre K.

Puisque la coordonnée ζ de A_0 est une fonction du paramètre v, la condition (a) équivaut à cette autre que les coordonnées ξ, η soient des fonctions de l'autre paramètre u.

On doit donc avoir [formules (2)]

$$(12) \qquad \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0.$$

La condition (b) est vérifiée, si les droites AA_1 sont normales aux sections droites correspondantes de K (représentées par l'équation $v =$ const.). Or les cosinus directeurs de la tangente aux lignes $v =$ const. sont proportionnels aux quantités

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

et ceux de la droite AA_1 sont proportionnels aux différences

$$f - F, \qquad \varphi - \Phi.$$

Il s'ensuit que la condition ultérieure à vérifier est exprimée par l'équation

$$(13) \quad (f - F)\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u}\right) + (\varphi - \Phi)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) = 0.$$

Conséquemment, les surfaces S, S_1 ne peuvent pas être prises arbitrairement d'avance, les fonctions f, φ, F, Φ, ψ, t étant liées par les relations (12), (13).

§ VII.

Exemple. — Les surfaces S, S_1 sont définies par les équations

$$(14)\qquad \begin{cases} x = l(u) + m(v), \\ y = l_1(u) + m_1(v), \\ z = \psi(v), \end{cases}$$

$$(15)\qquad \begin{cases} x_1 = \lambda(u) + \mu(v), \\ y_1 = \lambda_1(u) + \mu_1(v), \\ z_1 = \psi(v). \end{cases}$$

Les conditions (12) donnent

$$(16)\qquad \mu(v) = -m(v) + \alpha, \qquad \mu_1(v) = -m_1(v) + \beta;$$

(α, β constantes) et la condition (13) se réduit à

$$(17)\qquad \begin{cases} (l-\lambda)(l'+\lambda') + (2m-\alpha)(l'+\lambda') \\ \quad + (l_1-\lambda_1)(l'_1+\lambda'_1) + (2m_1-\beta)(l'_1+\lambda'_1) = 0, \end{cases}$$

d'où, en dérivant par rapport à v,

$$m'(l'+\lambda') + m'_1(l'_1+\lambda'_1) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{m'_1}{m'} = -\frac{l'+\lambda'}{l'_1+\lambda'_1}.$$

En remarquant que le premier membre est une fonction de v et le deuxième une fonction de u, on doit avoir

$$\frac{m'_1}{m'} = a, \qquad \frac{l'+\lambda'}{l'_1+\lambda'_1} = -a,$$

a étant une constante.

On trouve par intégration

$$(18)\qquad m_1 = am + b, \qquad \lambda_1 = -\frac{\lambda + l + al_1 + c}{a}.$$

(b, c constantes); et, en vertu de ces équations, on déduit de l'égalité (17)

$$[(a^2+1)\lambda-(a^2-1)l+2al_1+a^2\alpha+2ab-a\beta+c](l'+\lambda')=0.$$

Celle-ci se dédouble de la façon suivante :

$$(19)\quad \begin{cases} l'+\lambda'=0, \\ (a^2+1)\lambda-(a^2-1)l+2al_1+a^2\alpha+2ab-a\beta+c=0. \end{cases}$$

Si la première condition (19) a lieu, l'intégration donne

$$(20)\qquad \lambda=-l+e, \qquad (e=\text{const.}),$$

ce qui réduit la deuxième équation (18) à cette autre

$$(21)\qquad \lambda_1=-l_1-\frac{c+e}{a}.$$

Dans ce cas, les équations (14), (15), en vertu des égalités (16), (18), (20), (21), deviennent

$$(22)\quad \begin{cases} x=l(u)+m(v), \\ y=l_1(u)+am(v)+b, \\ z=\psi(v), \end{cases}$$

$$(23)\quad \begin{cases} x_1=-l(u)-m(v)+(\alpha+e), \\ y_1=-l_1(u)-am(v)-b+\left(\beta-\dfrac{c+e}{a}\right), \\ z_1=\psi(v); \end{cases}$$

et, comme les équations (2) donnent

$$(24)\quad \xi=\frac{\alpha+e}{2}, \qquad \eta=\frac{1}{2}\left(\beta-\frac{c+e}{a}\right), \qquad \zeta=\psi(v),$$

on en conclut que le cylindre ichnographique se réduit à une droite; les deux surfaces S, S_1 sont donc égales.

Si la deuxième condition (19) a lieu, on en déduit

$$\lambda=\frac{(a^2-1)l-2al_1-a^2\alpha-2ab+a\beta-c}{a^2+1}.$$

Si donc on suit un développement tout à fait analogue au précédent, on trouve que les équations (22) restent inaltérées et (23), (24) sont remplacées par les suivantes :

$$(25)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{(a^2-1)\,l(u) - 2a\,l_1(u)}{a^2+1} - m(v) + \dfrac{\alpha + a\beta - 2ab - c}{a^2+1}, \\ y_1 = -\dfrac{2a\,l(u) + (a^2-1)\,l_1(u)}{a^2+1} - am(v) + \dfrac{a(\alpha + a\beta - ab - c) + b}{a^2+1}, \\ z_1 = \psi(v). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{a^2\,l(u) - a\,l_1(u)}{a^2+1} + \dfrac{\alpha + a\beta - 2ab - c}{2(a^2+1)}, \\ \eta = \dfrac{-a\,l(u) + l_1(u)}{a^2+1} + \dfrac{a(\alpha + a\beta - c) + 2b}{2(a^2+1)}, \\ \zeta = \psi(v). \end{cases}$$

Comme les dernières équations donnent

$$\xi + a\eta = \frac{\alpha + a\beta - c}{2},$$

on en conclut que, dans ce cas, le cylindre ichnographique se réduit à un plan et que les deux surfaces S, S_1 représentées par les équations (22), (25), sont symétriques par rapport à ce plan.

§ VIII.

En supposant que x, y, ξ, η soient liées par les relations

$$x = f(\xi), \qquad y = \varphi(\eta),$$

la condition fondamentale (1) fait voir que : *la section droite du cylindre ichnographique est représentée par l'équation*

$$\xi^2 + \eta^2 + c = 2\int f(\xi)\,d\xi + 2\int \varphi(\eta)\,d\eta.$$

En particulier : *Quand* $x = a\xi$, $y = b\eta_1$, *le cylindre ichnographique a pour section droite la conique à centre*

$$(a-1)\xi^2 + (b-1)\eta_1^2 = c.$$

La ligne objective L *et sa symétrique* L_1 *sont placées sur deux cylindres, dont les sections droites sont les deux coniques à centre*

$$\frac{a-1}{a^2}x^2 + \frac{b-1}{b^2}y^2 = c, \qquad \frac{a-1}{(2-a)^2}x_1^2 + \frac{b-1}{(2-b)^2}y_1^2 = c.$$

Pareillement, quand ont lieu les relations

$$\xi = F(x), \qquad \eta_1 = \Phi(y),$$

ou bien les suivantes

$$x_1 = \lambda(x), \qquad y_1 = \mu(y),$$

la section droite du cylindre contenant la ligne objective L est représentée respectivement par les équations

$$F^2(x) + \Phi^2(y) - 2\int x\,F'(x)\,dx - 2\int y\,\Phi'(y)\,dy = c,$$

$$\lambda^2(x) + \mu^2(y) - (x^2 + y^2)$$
$$- 2x\,\lambda(x) - 2y\,\mu(y) + 4\int \lambda(x)\,dx + 4\int \mu(y)\,dy = c,$$

c étant une constante.

Les sections droites l, l_1 *des cylindres contenant les lignes symétriques* L, L_1, *peuvent-elles devenir deux courbes homothétiques, après la rotation de l'une d'entre elles autour d'un point?*

Si l'origine des axes est le centre de rotation (ce qui n'est pas une particularité) on doit avoir

$$(26) \qquad x_1 = k(x\cos\theta - y\sin\theta), \qquad y_1 = k(x\sin\theta + y\cos\theta),$$

k et θ étant deux constantes.

Dans cette hypothèse, la condition (8) devient

$$x\,dx + y\,dy = \frac{2k\sin\theta}{k^2-1}(y\,dx - x\,dy),$$

c'est-à-dire (en posant $x = \mathrm{R}\cos u$, $y = \mathrm{R}\sin u$)

$$\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}} = \frac{2k\sin\theta}{1-k^2}\,du.$$

On trouve par intégration

$$(27)\qquad \mathrm{R} = a e^{\frac{2k\sin\theta}{1-k^2}u},$$

a étant une constante arbitraire.

De même, en posant $x_1 = \mathrm{R}_1\cos u_1$, $y_1 = \mathrm{R}_1\sin u_1$, on en déduit

$$\mathrm{R}_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = k\mathrm{R}, \qquad \cot u_1 = \frac{x_1}{y_1} = \cot(u+\theta),$$

et conséquemment

$$(28)\qquad \mathrm{R}_1 = ak e^{\frac{2k\sin\theta}{1-k^2}(u_1-\theta)}.$$

On a, en outre,

$$\xi = \frac{x+x_1}{2} = \frac{(1+k\cos\theta)x - k\sin\theta\, y}{2},$$

$$\eta = \frac{y+y_1}{2} = \frac{k\sin\theta\, x + (1+k\cos\theta)y}{2},$$

d'où il suit

$$\mathrm{R}_0 = \sqrt{\xi^2+\eta^2} = \frac{\sqrt{k^2+2k\cos\theta+1}}{2}\mathrm{R},$$

$$\cot u_0 = \frac{\xi}{\eta} = \frac{(1+k\cos\theta)\cot u - k\sin\theta}{k\sin\theta\cot u + (1+k\cos\theta)}.$$

En résolvant la dernière équation par rapport à $\cot u$, on trouve

$$\cot u = \frac{k\sin\theta + (1+k\cos\theta)\cot u_0}{(1+k\cos\theta) - k\sin\theta\cot u_0}$$

$$= \cot\left[u_0 + \operatorname{arc\,cot}\left(-\frac{1+k\cos\theta}{k\sin\theta}\right)\right].$$

On a donc

$$(29)\qquad R_0 = \frac{a\sqrt{k^2+2k\cos\theta+1}}{2}\, e^{\frac{2k\sin\theta}{1-k^2}\left[u_0+\operatorname{arc\,cot}\left(-\frac{1+k\cos\theta}{k\sin\theta}\right)\right]}.$$

Les équations (27), (28), (29) démontrent que *les projections l, l_1 des lignes symétriques* L, L_1 *sur le plan coordonné $z=0$ et la section droite du cylindre ichnographique* K *sont trois spirales logarithmiques égales* [1], *ayant leurs pôles en un même point* (*l'origine*).

Remarque. — Les trois spirales logarithmiques reviennent à trois cercles, quand $\theta = 0$, ou $\theta = \pi$.

Les deux lignes symétriques L, L_1 *peuvent-elles être des lignes égales, avec la condition que les couples de points homologues dans l'égalité soient aussi correspondants dans la symétrie?*

Puisqu'on a toujours $z_1 = z$, la propriété susdite est vérifiée quand ont lieu les relations qu'on peut déduire des équations (26), en y supposant $k = 1$.

Dans cette hypothèse, on a

$$y\,dx - x\,dy = 0.$$

d'où, par intégration,

$$y = \alpha x,$$

α étant une constante.

Cette équation (en remarquant que $x = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta$, $y = -x_1\sin\theta + y_1\cos\theta$) donne

$$y_1 = \frac{\sin\theta + \alpha\cos\theta}{\cos\theta - \alpha\sin\theta}\,x_1.$$

---

[1] Ce résultat n'est pas en contradiction avec la condition posée dans le problème, comme on peut le supposer au premier abord; en effet, deux spirales logarithmiques semblables sont aussi des lignes égales.

En outre

$$\eta_1 = \frac{y + y_1}{x + x_1}\zeta = \frac{\sin\theta + \alpha(1 + \cos\theta)}{(1 + \cos\theta) - \alpha\sin\theta}\zeta.$$

Cette analyse démontre que les cylindres projetant les lignes symétriques L, L_1 sur le plan $z = 0$, et le cylindre ichnographique K sont réduits à trois plans passant par une droite.

On doit donc répondre négativement à la question énoncée plus haut.

[L¹18b]

NOTE POUR SERVIR A L'ÉTUDE DES FAISCEAUX DE CONIQUES;

PAR M. JOSEPH SER, à Nantes.

La théorie des polaires réciproques fait correspondre les propriétés des coniques passant par quatre points et celles des coniques tangentes à quatre droites. Le théorème suivant permet en outre de rattacher ces propriétés à celles de la conique directrice.

Soient trois droites AB, BC, CA, un point P et une quatrième droite Δ.

Nous allons considérer les trois involutions déterminées sur la droite Δ respectivement par l'intersection de cette droite :

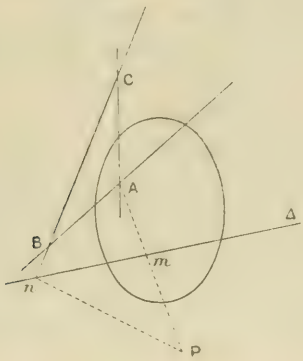
1° Avec les coniques (nous les appellerons les *coniques* S) passant par les quatre points A, B, C, P;

2° Avec les tangentes issues du point P aux coniques T qui touchent les quatre droites AB, BC, CA et Δ;

3° Avec les droites passant par le point P et conju-

guées par rapport à une conique (nous l'appellerons la *conique* D) déterminée sans ambiguïté de la manière suivante : elle admet le triangle ABC comme triangle conjugué, et la polaire du point P par rapport à cette conique est la droite Δ.

Fig. 1.



Nous disons que les trois involutions ainsi définies coïncident.

Considérons un couple de points tel que celui que nous obtenons par l'intersection de la droite Δ avec le système des droites PA, BC. Soient *m* et *n* ces deux points; ce couple est commun aux trois involutions.

Il appartient évidemment à la première pour le cas où l'on considère parmi les coniques S celle qui est formée des deux droites PA, BC.

Il appartient aussi à la seconde. En effet, parmi les coniques tangentes aux quatre droites AB, BC, CA et Δ, on peut considérer celle qui est réduite aux deux points A et *n* et les tangentes issues du point P à cette conique sont les droites P*m*A et P*n*.

Enfin, le couple appartient aussi à la troisième involution, car les droites P*m*A et P*n* sont conjuguées par

rapport à la conique D. En effet, le point n est l'intersection de la droite Δ, polaire du point P, et de la droite BC, polaire du point A. C'est donc le pôle de la droite PmA.

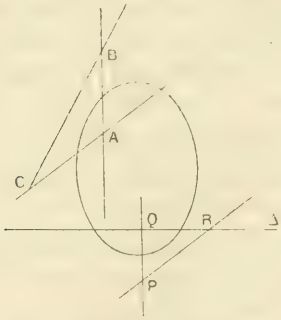
Comme il existe évidemment trois couples de points tels que le couple mn, ces couples étant communs aux trois involutions, celles-ci coïncident.

Remarquons que les coniques S peuvent être regardées comme les polaires réciproques des coniques T par rapport à la conique directrice D.

Applications. — On voit que ce théorème permet de relier dans chacun des groupes de coniques S, T et D les propriétés qui y dépendent respectivement de l'involution considérée. Par sa généralité et sa symétrie, il est susceptible d'un certain nombre d'applications; nous nous contenterons d'en déduire quelques théorèmes connus.

I. Soient Q et R deux points de la droite Δ. S'ils appartiennent à l'une des trois involutions considérées, ils appartiendront simultanément aux deux autres, et alors

Fig. 2.



il existera à la fois : 1° une conique circonscrite aux deux triangles ABC, PQR; 2° une conique inscrite dans

ces deux triangles; 3° une conique conjuguée de ces deux triangles. D'où nous pouvons conclure immédiatement cette proposition :

Si deux triangles ABC, PQR *sont placés de telle sorte qu'une des trois coniques circonscrite aux deux triangles, ou inscrite dans les deux triangles, ou conjuguée des deux triangles, existe, les deux autres existeront simultanément.*

II. Il est naturel d'étudier le cas où l'involution a une forme particulière. Nous le ferons dans le cas spécial où la droite Δ est à l'infini. Alors nous considérerons, au lieu des points en involution sur la droite Δ, le faisceau involutif des droites joignant ces points au point P. Les directions asymptotiques des coniques S sont alors les couples de droites de ce faisceau. Les coniques T sont des paraboles. La conique D a pour centre le point P.

Supposons que, parmi les droites du faisceau involutif joignant le point P aux points en involution sur Δ se trouvent les droites isotropes. Alors le point P est sur le cercle circonscrit au triangle ABC puisque, parmi les coniques passant par les quatre points A, B, C, P, s'en trouve une qui admet comme directions asymptotiques les droites isotropes, et, par conséquent, est un cercle. D'autre part, le point P est foyer d'une des paraboles T. Enfin la conique D est une hyperbole équilatère, puisqu'elle admet comme diamètres conjugués les droites isotropes.

Nous en concluons ces deux théorèmes connus :

Le cercle circonscrit à un triangle ABC est le lieu :

1° Des foyers des paraboles inscrites dans ce triangle;

2° Des centres des hyperboles équilatères conjuguées de ce triangle.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1899). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. VACQUANT,
Ancien élève de l'École Polytechnique,
Professeur au Lycée de Nancy.

On considère tous les paraboloïdes ayant les mêmes focales qu'un paraboloïde P *dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est*

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p} - 2x = 0.$$

On mène à ces paraboloïdes des normales parallèles à un plan Q *ayant pour équation*

$$ux + vy + wz = 0.$$

1° *Démontrer que la surface* S, *lieu des pieds de ces normales, peut être considérée comme engendrée par une parabole variable dont le plan enveloppe un cylindre parabolique* C.

2° *Démontrer que les coordonnées d'un point quelconque* M *de la surface* S *peuvent être exprimées rationnellement en fonction de deux paramètres* ρ, ρ_1 *qui fixent la position des plans tangents menés par le point* M *au cylindre* C.

Montrer, à l'aide des expressions ainsi trouvées, que le cylindre C *touche la surface* S *en tous les points d'une cubique.*

Montrer, à l'aide des mêmes expressions, que S *est une surface réglée du troisième ordre, dont les géné-*

ratrices rectilignes sont parallèles à celles d'un cône de révolution.

3° *La surface* S *admet une droite double* Δ *dont on demande les équations.*

4° *Démontrer que les génératrices rectilignes de la surface* S *rencontrent, en dehors de la droite double* Δ, *une autre droite* Δ_1 *avec laquelle elles font un angle constant. Trouver les équations de cette droite* Δ_1.

Remarque. — *Parmi les résultats énoncés, quelques-uns peuvent être établis facilement par la Géométrie; on saura gré aux candidats qui ajouteront ce mode de démonstration.*

La condition pour que le plan

$$ux + vy + wz + h = 0$$

soit tangent au paraboloïde P qui a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p} - 2x = 0,$$

est

$$pv^2 - pw^2 - 2uh = 0.$$

Toutes les quadriques ayant les mêmes focales que P appartiennent au faisceau tangentiel

$$pv^2 - pw^2 - 2uh + \lambda(u^2 - v^2 + w^2) = 0,$$

c'est-à-dire sont inscrites dans la développable circonscrite au paraboloïde donné et au cercle de l'infini; toutes ces quadriques sont des paraboloïdes.

I. Soit P_λ un de ces paraboloïdes; prenons un point $M(x, y, z)$ sur P_λ tel que la normale en M soit parallèle à un plan Q ayant pour équation

$$ux + vy + wz + h = 0.$$

Le plan tangent en M, de coordonnées u_0, v_0, w_0, h_0, sera perpendiculaire au plan Q et l'on aura

$$uu_0 + vv_0 + ww_0 = 0$$

avec

$$\lambda u_0^2 + (\lambda + p) v_0^2 + (\lambda - p) w_0^2 - 2 u_0 h_0 = 0,$$

$$x = \frac{\lambda u_0 - h_0}{-u_0}, \qquad y = \frac{(\lambda + p) v_0}{-u_0}, \qquad z = \frac{(\lambda - p) w_0}{-u_0}.$$

Entre ces équations éliminons u_0, v_0, w_0, h_0; pour cela tirons les rapports $\frac{v_0}{u_0}$, $\frac{w_0}{u_0}$, $\frac{h_0}{u_0}$ des trois dernières et substituons dans les deux autres, ce qui donne

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{\lambda + p} + \dfrac{z^2}{\lambda - p} - 2x - \lambda = 0, & (1) \\[2ex] \dfrac{vy}{\lambda + p} + \dfrac{vz}{\lambda - p} - u = 0. & (2) \end{cases}$$

L'élimination de λ entre (1) et (2) donnerait l'équation de la surface S; il est préférable de considérer ces équations comme définissant les coordonnées x, y, z d'un point M de la surface S en *fonctions rationnelles* de deux paramètres z et λ, ce qui montre déjà que la surface S est unicursale; de plus ces équations (1) et (2) s'interprètent aisément : la première est l'équation ponctuelle des paraboloïdes P_λ homofocaux à P, la seconde est l'équation du plan diamétral de P_λ conjugué de la direction $\frac{X}{u} = \frac{Y}{v} = \frac{Z}{w}$ perpendiculaire au plan Q; ce résultat est facile à établir géométriquement, car au point $M(x, y, z)$ le plan tangent (u_0, v_0, w_0, h_0) à P_λ est perpendiculaire au plan Q, c'est-à-dire est parallèle à une perpendiculaire à Q; donc, sur P_λ, le lieu des points M est dans le plan diamétral conjugué de la direction perpendiculaire à Q; les équations (1) et (2) représentent donc une parabole dont le lieu est S.

L'équation du plan de cette parabole peut s'écrire

$$vy(\lambda - p) + wz(\lambda + p) - u(\lambda^2 - p^2) = 0$$

ou

$$(2') \qquad u\lambda^2 - \lambda(vy + wz) + p(vy - wz - pu) = 0.$$

L'enveloppe de ce plan est le cylindre parabolique C ayant pour équation ponctuelle

$$(C) \qquad (vy + wz)^2 - 4pu(vy - wz - pu) = 0.$$

II. Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de la surface S; l'équation (2'), du second degré en λ, a deux racines ρ et ρ_1 qui fixeront la position des deux plans tangents menés à (C) par le point $M(x, y, z)$. On a

$$\rho + \rho_1 = \frac{vy + wz}{u},$$

$$\rho\rho_1 = \frac{p(vy - wz - pu)}{u}.$$

D'ailleurs l'équation de S, $f(x, y, z) = 0$, est la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (1) et (2) en λ aient une racine commune, soit ρ. On aura

$$\frac{y^2}{\rho + p} + \frac{z^2}{\rho - p} - 2x - \rho = 0.$$

Des équations

$$vy + wz = u(\rho + \rho_1),$$

$$vy - wz = \frac{u}{p}\rho\rho_1 - pu,$$

on déduit, par addition et soustraction,

$$2vy = u(\rho + \rho_1) + \frac{u}{p}\rho\rho_1 + pu = \frac{u}{p}(\rho + p\rho_1 + p)$$

$$2wz = u(\rho + \rho_1) - \frac{u}{p}\rho\rho_1 - pu = -\frac{u}{p}$$

Ensuite

$$2x = \frac{y^2}{4p^2v^2}(\rho + p)(\rho_1 + p)^2 + \frac{z^2}{4p^2w^2}(\rho - p)(\rho_1 - p)^2 - \rho.$$

De sorte que les expressions demandées sont

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x = \dfrac{u^2}{8p^2v^2}(\rho + p)(\rho_1 + p)^2 \\ \qquad - \dfrac{u^2}{8p^2w^2}(\rho - p)(\rho_1 - p)^2 - \dfrac{\rho}{2}, \\ y = \dfrac{u}{2pv}(\rho - p)(\rho_1 - p). \\ z = -\dfrac{u}{2pw}(\rho - p)(\rho_1 - p). \end{cases}$$

La relation entre ρ et ρ_1 définissant l'intersection de la surface S et du cylindre C s'obtient en remplaçant dans l'équation (C) y et z ou mieux $vy + wz$ et $vy + wz - pu$ par leurs valeurs en ρ et ρ_1. On obtient

$$u^2(\rho + \rho_1)^2 - 4pu\frac{u}{p}\rho\rho_1 = 0$$

ou

$$(\rho - \rho_1)^2 = 0,$$

d'où

$$\rho = \rho_1,$$

ce qui montre que les plans tangents à C issus d'un point M de l'intersection de C et S sont confondus, résultat évident *a priori*. En faisant dans (II) $\rho_1 = \rho$, on a les équations d'une cubique Γ. L'intersection de C et S est donc la cubique Γ comptée *deux fois*, et il en résulte que C et S se raccordent le long de cette cubique. On peut le voir autrement en déterminant le cylindre circonscrit à S parallèlement à Ox et montrant qu'il se raccorde avec S le long de la cubique Γ ($\rho_1 = \rho$).

L'équation du plan tangent au point (ρ, ρ_1) à S est

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \rho_1} & \frac{\partial y}{\partial \rho_1} & \frac{\partial z}{\partial \rho_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour qu'il soit parallèle à Ox, il faut

$$\frac{\partial y}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial \rho_1} - \frac{\partial y}{\partial \rho_1}\frac{\partial z}{\partial \rho} = 0$$

ou

$$-(\rho_1+p)(\rho-p)+(\rho+p)(\rho_1-p)=0$$

ou

$$2p(\rho_1-\rho)=0.$$

D'où

$$\rho_1=\rho.$$

équation qui définit la cubique Γ.

En faisant $\rho_1 =$ constante dans les équations (II), elles représentent une droite située sur la surface S; par suite, en faisant varier ρ_1, on voit que S est une surface réglée.

Les équations d'une génératrice rectiligne G_1 répondant à une valeur donnée de ρ_1 sont

$$(G_1)\quad \begin{cases} x = \left[\frac{u^2}{8p^2v^2}(\rho_1+p)^2+\frac{u^2}{8p^2w^2}(\rho_1-p)^2-\frac{1}{2}\right]\rho \\ \qquad + \frac{u^2}{8pv^2}(\rho_1+p)^2-\frac{u^2}{8pw^2}(\rho_1-p)^2, \\ y = \frac{u}{2pv}(\rho_1+p)\rho+\frac{u}{2v}(\rho_1+p), \\ z = -\frac{u}{2pw}(\rho_1-p)\rho+\frac{u}{2w}(\rho_1-p). \end{cases}$$

Ces équations sont de la forme

$$\begin{cases} x = \alpha\rho+a, \\ y = \beta\rho+b, \\ z = \gamma\rho+c, \end{cases}$$

et l'on voit, d'après les équations (G_1), les valeurs de α, β, γ, a, b, c en fonction de ρ_1.

La surface S est du troisième ordre, car son intersection avec un plan quelconque

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est définie, sur la surface, par l'équation

$$(A\alpha + B\beta + C\gamma)\rho + (Aa + Bb + Cc + D) = 0.$$

Si l'on remplace dans les équations (G_1) ρ par sa valeur tirée de l'équation précédente, on obtient les équations d'une cubique unicursale, le paramètre étant ρ_1.

La parallèle à une génératrice G_1 menée par l'origine a pour équations

$$\frac{x}{\dfrac{u^2}{8p^2v^2}(\rho_1+p)^2+\dfrac{u^2}{8p^2w^2}(\rho_1-p)^2-\dfrac{1}{2}}$$
$$=\frac{y}{\dfrac{u}{2pv}(\rho_1+p)}=\frac{z}{-\dfrac{u}{2pw}(\rho_1-p)}=\frac{1}{\dfrac{\mu}{2}}.$$

On trouve l'équation du cône engendré par cette parallèle en éliminant μ et ρ_1 entre les équations

$$\left\{\begin{aligned}
&\mu x = \frac{u^2}{4p^2v^2}(\rho_1+p)^2+\frac{u^2}{4p^2w^2}(\rho_1-p)^2-1,\\
&\mu y = \frac{u}{pv}(\rho_1+p),\\
&\mu z = -\frac{u}{pw}(\rho_1-p).
\end{aligned}\right.$$

Les deux dernières équations sont du premier degré en ρ_1 et μ; en les résolvant on a

$$\frac{p}{u}\mu = \frac{\rho_1+p}{vy} = \frac{\rho_1-p}{-wz} = \frac{2\rho_1}{vy-wz} = \frac{2p}{vy-wz},$$

d'où

$$\rho = \frac{2u}{vy - wz}, \qquad \rho_1 + p = \frac{2pvy}{vy - wz}, \qquad \rho_1 - p = \frac{-2pwz}{vy + wz}.$$

Substituant dans la première équation, on a le cône

$$2ux(vy + wz) = u^2(y^2 - z^2) - (vy + wz)^2$$

ou

$$u^2(x^2 + y^2 + z^2) - (ux + vy + wz)^2 = 0,$$

de révolution, ayant pour axe une perpendiculaire au plan Q.

III. L'élimination de ρ et ρ_1 entre les équations (II) conduirait à l'équation $f(x, y, z) = 0$ de la surface S. Pour faire cette élimination on tirerait, par exemple, ρ de l'une des équations et l'on porterait la valeur trouvée dans les deux autres; d'où deux équations en ρ_1. En éliminant ρ_1 on trouverait $f(x, y, z) = 0$, équation qui exprime que les deux équations en ρ_1 ont en général une racine commune, ou encore par un point *quelconque* (x, y, z) de S passe une seule génératrice rectiligne; mais on a vu que toute section plane de S est une cubique unicursale, et par suite ayant un point double; donc la surface S a une ligne double qui est nécessairement une droite Δ; car, autrement, une section plane quelconque aurait au moins deux points doubles et se décomposerait. Il résulte de là que l'on pourra choisir le point (x, y, z), d'une infinité de manières, de façon que les deux équations en ρ_1 aient deux racines communes; on a ainsi un procédé de calcul assez simple pour trouver les équations de la droite double.

Entre les équations (II) éliminons donc ρ et ρ_1; pour cela, remarquons que la première de ces équations s'écrit, en tenant compte des deux autres,

$$x = \frac{uy}{4pv}(\rho_1 - p) - \frac{uz}{4pw}(\rho_1 - p) - \frac{\rho}{2},$$

d'où

$$\rho = \frac{uy}{2p}(\rho_1 + p) - \frac{uz}{2pw}(\rho_1 - p) - 2x.$$

Remplaçant ρ par cette valeur dans les deux dernières équations (II) on obtient

$$y = \frac{u}{2pv}(\rho_1 + p)\left[\frac{uy}{2pv}(\rho_1 + p) - \frac{uz}{2pw}(\rho_1 - p) - 2x + p\right],$$

$$z = \frac{-u}{2pw}(\rho_1 - p)\left[\frac{uy}{2pv}(\rho_1 + p) - \frac{uz}{2pw}(\rho_1 - p) - 2x - p\right].$$

Si l'on ordonne ces équations par rapport à ρ_1, après avoir multiplié les deux membres de la première par v et ceux de la seconde par w, on a

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{u^2}{4p^2}\rho_1^2\left(\frac{y}{v} - \frac{z}{w}\right) + \frac{\rho_1 u}{2p}\left(\frac{uy}{v} - 2x + p\right) \\ &\qquad + \frac{u^2}{4}\left(\frac{y}{v} + \frac{z}{w}\right) + \frac{u}{2}(-2x + p) - vy = 0. \\ &\frac{u^2}{4p^2}\rho_1^2\left(-\frac{y}{v} + \frac{z}{w}\right) + \frac{\rho_1 u}{2p}\left(-\frac{u}{w}z + 2x + p\right) \\ &\qquad + \frac{u^2}{4}\left(\frac{y}{v} + \frac{z}{w}\right) - \frac{u}{2}(2x + p) - wz = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir la racine commune ρ_1 à ces deux équations, il suffit de les ajouter membre à membre, d'où

$$\frac{\rho_1 u}{2p}\left(\frac{u}{v} - \frac{u}{w}z + 2p\right) + \frac{u^2}{2}\left(\frac{y}{v} + \frac{z}{w}\right) - 2ux - vy - wz = 0.$$

On a ainsi la valeur du paramètre ρ_1 qui fixe la position de la génératrice rectiligne G_1 passant par le point quelconque (x, y, z) de la surface S; mais les deux équations du second degré en ρ_1 auront *deux* racines communes si les coordonnées (x, y, z) satisfont aux équations

$$(\Delta)\quad \left\{\begin{aligned} &u\left(\frac{y}{v} - \frac{z}{w}\right) + 2p = 0, \\ &\frac{u^2}{2}\left(\frac{y}{v} + \frac{z}{w}\right) - 2ux - vy - wz = 0. \end{aligned}\right.$$

obtenues en écrivant que les équations en ρ_1 ont leurs coefficients proportionnels. Pour ces valeurs de x, y, z la valeur de ρ_1 est indéterminée, comme cela devait être. On obtient ainsi les équations (Δ) d'une droite appartenant à S comme droite double.

On peut utiliser, d'une autre manière, les équations (II), pour démontrer l'existence de la droite double Δ et en trouver les équations. J'indiquerai seulement le calcul qui est moins simple que le précédent. On cherche la condition pour que deux génératrices rectilignes ρ_1 et ρ_2 de S se rencontrent, et ensuite le lieu de leur point de rencontre qui est la ligne double Δ. On trouve pour cette condition la relation involutive

$$(v^2 - w^2)\rho_1\rho_2 + p(\rho_1 + \rho_2)(v^2 - w^2) + p^2(v^2 + w^2) + \frac{4p^2v^2w^2}{u^2} = 0,$$

et, pour les coordonnées x, y, z du point de rencontre des génératrices ρ_1, ρ_2, on obtient des expressions linéaires en $\rho_1\rho_2$ et $\rho_1 + \rho_2$. Pour retrouver les équations (Δ), il suffit d'éliminer $\rho_1\rho_2$ et $\rho_1 + \rho_2$ entre les équations donnant x, y, z et la relation involutive.

Enfin, sans se servir des équations (II), on peut arriver très simplement aux équations de la droite double Δ en appliquant une propriété bien connue des quadriques homofocales (c'est M. Rœsch, Professeur au Collège de Montélimar, qui m'a fait penser à ce procédé):

Reprenons l'équation ponctuelle (1) des paraboloïdes homofocaux P_λ

$$\frac{y^2}{\lambda - p} + \frac{z^2}{\lambda - p} - 2x - \lambda = 0.$$

Par un point $M(x, y, z)$ passent trois paraboloïdes P_λ

se coupant, comme on sait, deux à deux à angle droit. Soient MN, MN′, MN″ les normales à ces paraboloïdes formant un trièdre trirectangle. Le point M sera un point double de la surface S si deux normales MN, MN′ sont parallèles au plan Q, et la troisième MN″ sera perpendiculaire au plan Q, c'est-à-dire on doit chercher sur P_λ le point M tel que la normale en ce point soit perpendiculaire au plan Q. En éliminant λ entre les équations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y^2}{\lambda+p}+\dfrac{z^2}{\lambda-p}-2x-\lambda=0, \\[2ex] \dfrac{-1}{u}=\dfrac{\dfrac{y}{\lambda+p}}{v}=\dfrac{\dfrac{z}{\lambda-p}}{w}, \end{array}\right.$$

on obtient le lieu du point double M. On écrit les deux dernières

$$\lambda+p=-\frac{u}{v}y, \qquad \lambda-p=-\frac{u}{w}z.$$

L'élimination de λ est immédiate et l'on a

$$\left\{\begin{array}{l} u\left(\dfrac{y}{v}-\dfrac{z}{w}\right)+2p=0, \\[2ex] -\dfrac{vy+wz}{u}-2x+\dfrac{u}{2}\left(\dfrac{y}{v}+\dfrac{z}{w}\right)=0, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire les équations (Δ).

IV. Dans les équations (G_1) prenons l'expression de x et cherchons une valeur constante K de ρ annulant le terme en ρ_1^2; d'où

$$\left(\frac{u^2}{8p^2v^2}+\frac{u^2}{8p^2w^2}\right)K+\frac{u^2}{8pv^2}-\frac{u^2}{8pw^2}=0,$$

$$K=\frac{p(v^2-w^2)}{v^2+w^2}.$$

Le point correspondant à $\rho=K$ sur chaque génératrice ρ_1 décrit, quand ρ_1 varie, une droite, car les

expressions de y et z sont linéaires en ρ_1 et cette droite est rencontrée par toutes les génératrices G_1. Les coordonnées x, y, z d'un point de cette droite sont

$$x = \left[2p\rho_1\left(\frac{u^2}{8p^2v^2} - \frac{u^2}{8p^2w^2}\right) - \frac{1}{2}\right]K + 2p\rho_1\left(\frac{u^2}{8pv^2} + \frac{u^2}{8pw^2}\right),$$

en tenant compte de la définition de K; ordonnant le second membre par rapport à ρ_1, on a

$$x = \frac{\rho_1 u^2}{4}\left(\frac{w^2 - v^2}{v^2 w^2}\,\frac{v^2 - w^2}{v^2 + w^2} + \frac{v^2 + w^2}{v^2 w^2}\right) - \frac{K}{2},$$

$$x = \frac{\rho_1 u^2}{v^2 + w^2} - \frac{p(v^2 - w^2)}{2(v^2 - w^2)}.$$

Ensuite les deux dernières équations (II) donnent

$$y = \frac{u}{2pv}(\rho_1 + p)(K + p)$$

$$= \frac{u}{2pv}(\rho_1 + p)\frac{2pv^2}{v^2 + w^2} = \frac{uv}{v^2 + w^2}(\rho_1 + p),$$

$$z = -\frac{u}{2pw}(\rho_1 - p)(K - p) = \frac{uw}{v^2 + w^2}(\rho_1 - p).$$

On a ainsi les équations d'une droite Δ_1 rencontrée par toutes les génératrices G_1, savoir

$$(\Delta_1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x + \frac{p}{2}\left(\frac{v^2 - w^2}{v^2 + w^2}\right)}{u} = \frac{y - \frac{puv}{v^2 - w^2}}{v} \\ &= \frac{z + \frac{puw}{v^2 + w^2}}{w} = \frac{u}{v^2 + w^2}\rho_1. \end{aligned}\right.$$

Deux génératrices G_1, G_2 rencontrent, d'après les équations précédentes, la droite Δ_1 en des points distincts, et par suite Δ_1 est une droite simple de S. Le plan (Δ_1, G_1) coupe la surface S suivant une troisième droite G_2 rencontrant G_1 sur la droite double Δ_1 d'après ce qui précède (III).

Les équations de Δ_1 montrent que cette droite est parallèle à l'axe du cône de révolution trouvé plus haut; il en résulte que les génératrices rectilignes de S coupent Δ_1 sous un angle constant égal au demi-angle d'ouverture de ce cône.

Remarque. — Quelques considérations géométriques simples permettent de répondre partiellement aux questions III et IV. On a déjà montré, comme conséquence de la représentation paramétrique de la surface S, que celle-ci admet une droite double Δ.

Une génératrice quelconque G_1 de la surface rencontre Δ, car si cela n'était pas, deux génératrices rectilignes G_1, G_2 et la droite double Δ définiraient un hyperboloïde H; les génératrices de H, de système différent de G_1, rencontreraient S en quatre points dont deux confondus sur Δ, et alors H ferait partie de S, ce qui n'est pas.

Maintenant soient G_1, G_2, G_3, G_4 quatre génératrices quelconques de S; on peut mener deux droites les rencontrant : l'une est Δ, d'après ce qui précède; soit Δ_1 l'autre; cette dernière rencontrera aussi une génératrice quelconque G de S, car par un point M pris arbitrairement sur S passe une droite s'appuyant sur Δ et Δ_1, ayant, par conséquent, quatre points sur S; c'est donc la génératrice G de S qui passe en M. Ceci suppose que, par M, il ne passe qu'une génératrice rectiligne G; cette propriété résulte immédiatement, comme on l'a vu, des équations (II) et peut aussi s'établir par la Géométrie; c'est d'ailleurs une propriété qui appartient à toute surface réglée du troisième ordre dont l'étude géométrique et analytique figure dans un certain nombre d'Ouvrages; pour cette raison, je pense qu'il est inutile de rappeler ici la démonstration géométrique de cette propriété.

BIBLIOGRAPHIE.

Problèmes de Géométrie élémentaire, groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution ; par *Ivan Alexandroff*, professeur de Mathématiques au lycée de Tambov (Russie). Traduit du russe sur la 6e édition par *D. Aitoff*. Un vol. in-8°. Prix : 5 fr. Paris, A. Hermann, 1899.

Ainsi que son titre l'indique, le Livre de M. Alexandroff adopte, comme le remarquable Ouvrage de M. Julius Petersen (1), la classification des problèmes de Géométrie d'après les méthodes à employer pour les résoudre, qui est, sans contredit, la plus logique et la plus féconde.

Il renferme 900 exercices, pour la plupart de Géométrie plane, dont les difficultés sont graduées de manière à faire saisir aux élèves tout le parti que l'on peut tirer d'une méthode bien comprise.

Chaque Chapitre contient l'exposé d'une ou plusieurs méthodes, un nombre suffisant d'exercices résolus élucidant chaque méthode, puis un grand nombre d'exercices proposés à résoudre par les mêmes principes.

Les six éditions que l'Ouvrage de M. Alexandroff a eues en Russie en peu de temps en font suffisamment l'éloge; c'est un Livre qui répond à un besoin et qui paraît destiné à rendre en France de très grands services.

---

(1) *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*. Paris, Gauthier-Villars, 1890.

QUESTIONS.

1838. Chasles a démontré depuis longtemps qu'une courbe gauche du quatrième ordre à point double est tangente à deux directrices et à deux génératrices de tout hyperboloïde qui la contient, et que les quatre points de contact sont situés dans un même plan.

On demande de démontrer :

1° Que les plans osculateurs de la courbe en ces quatre points se rencontrent en un même point situé sur la droite d'intersection des plans osculateurs au point double;

2° Que ces mêmes plans rencontrent de nouveau la courbe en quatre points situés dans un même plan, qui sont les points de contact de la courbe avec deux directrices et deux génératrices d'un hyperboloïde qui la contient.

On peut encore énoncer le premier de ces théorèmes de la manière suivante :

Par un point pris sur la droite d'intersection des plans osculateurs au point double d'une courbe gauche du quatrième ordre, on peut mener à la courbe quatre plans osculateurs autres que ceux qui la touchent au point double : leurs points de contact sont situés dans un même plan, et les tangentes à la courbe en ces quatre points forment un quadrilatère gauche. (E. Genty.)

ERRATA.

3e série, t. XV, 1896; pages 9 et 16, *au lieu de* par rayons vecteurs réciproques, *lisez* par polaires réciproques (ou plutôt dualistique).

3e série, t. XVIII, 1899; page 304, lignes 14 et 21, et page 305, lignes 8 et 10, *au lieu de* $\sqrt{}$, *lisez* $\sqrt[2k]{}$.

Page 580, 1re colonne, *biffez* 549 (*voir* même Tome, p. 472).

Page 589, 2e colonne, ligne 14, *au lieu de* Combebiac, *lisez* Combebiac.

[K11]

GÉOMÉTRIE DU CERCLE DANS LE PLAN.

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1899;

PAR M. G. GALLUCCI.

Sujet.

L'équation d'un cercle rapporté à deux axes rectangulaires, situés dans son plan, peut se mettre sous la forme

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0, \tag{1}$$

en posant

$$\left\{\begin{array}{ll} x = x_1, & y = x_1, \\ \dfrac{x^2 - y^2 - 1}{2i} = x_3, & \dfrac{1 - x^2 - y^2}{2i} = x_4, \end{array}\right. \tag{2}$$

de sorte que les variables x_1, x_2, x_3, x_4 satisfont à la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0. \tag{3}$$

On peut appeler les quatre quantités u_1, u_2, u_3, u_4 les coordonnées du cercle, et l'on peut dire : 1° que toute relation homogène entre ces quantités définit un réseau de cercles; 2° que deux relations homogènes définissent une série de cercles; 3° que trois relations homogènes définissent un système de cercles d'après les degrés des équations qui les définissent.

I. *Interpréter, en Géométrie à trois dimensions, les*

équations (1) *et* (3), *qui définissent le cercle, et les formules* (2), *qui conduisent à cette définition. En déduire les propriétés des réseaux et des séries linéaires de cercles.*

II. *Étudier en particulier et aussi complètement que possible les propriétés des réseaux quadratiques, c'est-à-dire des réseaux définis par une équation homogène et du second degré en* u_1, u_2, u_3, u_4. *Rapprocher ces propriétés de celles des surfaces du second ordre.*

III. *Montrer comment l'étude des systèmes de cercles faite d'après cet ordre d'idées permet de construire un cercle tangent à trois cercles donnés par une méthode différente de la célèbre méthode de Gergonne.*

Développement.

Dans le développement qui suit, nous nous limitons aux résultats principaux que nous exposons en trois paragraphes.

Chacun de ces paragraphes est suivi d'une série de notes et d'exercices qui en complètent l'argument. A la fin, nous avons ajouté une courte Notice historique.

I. — Réseaux et séries linéaires de cercles.

1. *Interprétation des formules.* — Les

$$x_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

étant les coordonnées d'un point de l'espace par rap- à un tétraèdre de référence $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{b}_4$, la (3) est l'équation d'une quadrique elliptique Q dont ce tétraèdre est autopolaire, la (1) est l'équation du plan de coordonnées u_i, et les formules (2) définissent une correspondance univoque entre les points de Q et les points du plan π dans lequel nous considérons le sys-

tème de coordonnées x, y. Dans cette correspondance, aux sections de Q avec les plans

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

correspondent les cercles de π dont les coordonnées sont u_1, u_2, u_3, u_4.

Si l'équation cartésienne du cercle est

$$a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0,$$

nous aurons

$$g = u_1, \qquad f = u_2, \qquad a = u_3 + u_4, \qquad c = u_4 - u_3,$$

$$u_1 = g, \qquad u_2 = f, \qquad u_3 = \frac{1}{2}(a + c), \qquad u_4 = \frac{1}{2}(a - c).$$

Les coordonnées du centre et le rayon sont respectivement

$$x_0 = -\frac{g}{a} = -\frac{u_1}{u_3 + u_4}, \qquad y_0 = -\frac{f}{a} = -\frac{u_2}{u_3 + u_4},$$

$$r = \frac{1}{a}\sqrt{g^2 + f^2 - ac} = \frac{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2}}{u_3 + u_4}.$$

Les cercles de rayon nul (cercles qui se réduisent à deux droites isotropes) ont les coordonnées qui vérifient l'équation

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 = 0:$$

ils correspondent aux plans tangents à la quadrique Q.

Les cercles de rayon infini (droites de π) ont les coordonnées qui vérifient l'équation

$$u_3 + u_4 = 0:$$

ils correspondent aux plans qui passent par le point $P = (0, 0, 1, 1)$ de la quadrique.

Il résulte de ce qui précède que la correspondance définie par les (2) est une correspondance de Chasles entre les points de Q et les points de π: on obtient le

cercle correspondant à un plan en projetant son intersection avec la quadrique Q du point P sur le plan π. Le point P est un ombilic de Q et le plan α tangent en P est parallèle à π, son équation est

$$x_4 - x_3 = 0.$$

Il est bon d'observer que pour tous les cercles de π, hors ceux de rayon infini, on peut supposer $u_3 + u_4 = 1$, car nous pouvons diviser les coordonnées homogènes u_i par une même quantité. Alors les coordonnées du centre et le rayon du cercle de coordonnées

$$u_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

deviennent

$$x_0 = -u_1, \qquad y_0 = -u_2, \qquad r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2}.$$

Pour tous les points de la quadrique Q, hors le point P, on a

$$x_4 - x_3 = 1;$$

donc, pour trouver le point (x, y) correspondant à un point (x_1, x_2, x_3, x_4), on doit diviser les x_i par $x_4 - x_3$.

2. *a. Cercles qui se coupent orthogonalement.* — Les deux cercles

$$a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0,$$
$$a'(x^2 + y^2) + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

se coupent orthogonalement si l'on a

$$2(gg' + ff') = ac' + a'c.$$

Pour les coordonnées u_i, u'_i des deux cercles, on trouve la condition

$$u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + u_3 u'_3 - u_4 u'_4 = 0,$$

donc :

Les plans qui correspondent à deux cercles orthogonaux sont réciproques par rapport à la quadrique Q *et réciproquement.*

b. Construction du centre du cercle γ *correspondant à un plan* Γ. — Soit c le pôle de Γ par rapport à Q; le point G où la droite PC perce le plan π est le centre de γ. En effet, aux plans qui passent par PC correspondent des droites orthogonales à γ, ces droites sont des diamètres de γ et, par conséquent, leur point commun G est le centre du cercle.

c. Cercles conjugués. — On appelle *cercles conjugués* ceux qui diffèrent seulement par le signe du carré du rayon; deux points diamétralement opposés de l'un d'eux sont conjugués par rapport à l'autre. Si les deux cercles u_i, u'_i sont conjugués, nous aurons (n° 1)

$$u_1 = u'_1, \qquad u_2 = u'_2,$$
$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 = -(u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2 + u_4'^2),$$

d'où découlent finalement les formules suivantes :

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = u'_1 : u'_2 : u'_4 = u_1'^2 - u_2'^2 : u'_3 + u_1'^2 + u_2'^2,$$
$$u'_1 : u'_2 : u'_3 : u'_4 = u_1 : u_2 : u_4 = u_1^2 - u_2^2 : u_3 + u_1^2 + u_2^2,$$

qui définissent une correspondance birationnelle quadratique involutive T entre les plans de l'espace. Cette correspondance, qui nous sera utile dans la suite, est l'image de la correspondance entre les cercles de π et leurs conjugués.

Si le cercle u_i est réel, le cercle u'_i sera imaginaire, et réciproquement, c'est-à-dire si le plan u_i coupe la quadrique Q, le plan u'_i ne la coupera pas, et réciproquement.

d. Cercles qui se coupent diamétralement. — Si un

cercle coupe diamétralement un cercle γ, il coupera orthogonalement le cercle γ_1 conjugué de γ (n° 2, *c*).

e. *Cercles tangents*. — Si deux cercles γ et δ se touchent en un point M, les plans correspondants se coupent suivant une droite qui touche la quadrique Q au point qui correspond à M.

3. *a*. Une équation

$$\sum_1^4 a_i u_i = 0$$

définit un réseau linéaire de cercles qui est représenté dans l'espace par la gerbe des plans passant par le point A dont les coordonnées homogènes sont les a_i. Cette gerbe est complètement déterminée par trois de ses plans, donc un réseau linéaire est déterminé par trois de ses cercles.

Le plan polaire de A par rapport à Q étant réciproque de tous les plans de la gerbe, représente un cercle γ qui coupe orthogonalement tous les cercles du réseau (n° 2, *a*). Le cercle γ_1, conjugué de γ, sera coupé diamétralement par tous les cercles du réseau (n° 2, *c*). Donc :

Dans tout réseau linéaire de cercles, il existe deux cercles γ, γ_1 conjugués entre eux, dont l'un est coupé orthogonalement et l'autre diamétralement par tous les cercles du réseau.

De ces deux cercles γ, γ_1, un est réel et l'autre imaginaire.

b. Dans un réseau linéaire de cercles, il y en a ∞^1 qui se réduisent à des droites ; ils correspondent aux plans de la gerbe qui passent par P et qui forment un fais-

ceau. On trouve ainsi le faisceau des droites qui passent par le centre du cercle orthogonal γ du réseau (n° 2, *b*).

De même, il y a dans un réseau linéaire ∞^1 cercles de rayon nul; ils correspondent aux plans qui passent par A et touchent la quadrique Q. Par conséquent, ce sont les couples de droites isotropes dont le point réel de rencontre se trouve sur le cercle orthogonal γ du réseau.

c. Cas spéciaux. — Si le point A est sur Q, le réseau se compose de tous les cercles qui passent par le point A′ correspondant de A; le cercle orthogonal se réduit au couple de droites isotropes passant par A′. En particulier, si A coïncide avec P, le réseau est composé de toutes les droites de π.

Si le point A se trouve sur le plan α tangent en P à la quadrique Q, le réseau se compose de cercles dont les centres sont sur une droite *a*. En effet, le plan α, polaire de P, passe par A, le plan polaire de A passera par P et, par conséquent, le cercle orthogonal du réseau est la droite *a* d'intersection de π avec ce plan; cette droite, devant couper orthogonalement tous les cercles du réseau, devra contenir les centres de ces cercles.

d. Exemples. — 1° Les cercles qui coupent orthogonalement un cercle fixe; 2° les cercles qui coupent diamétralement un cercle fixe; 3° un autre exemple, très intéressant, est donné par le beau théorème de Faure :

Les cercles circonscrits aux triangles autopolaires par rapport à une même conique forment un réseau linéaire.

Nous pouvons considérer ce théorème comme une conséquence immédiate du théorème de Frégier dans

l'espace [1]. Si nous projetons du point P les triangles autopolaires par rapport à la conique de π, nous aurons des trièdres dont les arêtes coupent la quadrique Q en trois points, qui déterminent un plan Γ représentant le cercle circonscrit au triangle correspondant. Le théorème de Frégier nous enseigne que tous les plans Γ passent par un même point A, donc les cercles circonscrits aux triangles autopolaires par rapport à la conique appartiennent à un réseau linéaire.

4. a. Deux équations

$$\sum_1^4 a_i u_i = 0, \qquad \sum_1^4 b_i u_i = 0$$

définissent une série linéaire (ou faisceau) de cercles, qui est représentée dans l'espace par le faisceau des plans communs aux gerbes de plans

$$\sum_1^4 a_i u_i = 0$$

et

$$\sum_1^4 b_i u_i = 0.$$

Soient l l'axe de ce faisceau de plans, l' sa réciproque par rapport à Q; en projetant l' du point P sur le plan π, on a une droite qui contient les centres de tous les cercles de la série (n° 2, b). Les projections des deux points communs à l et à Q sont communs à tous les cercles de la série.

---

[1] *Théorèmes nouveaux sur les lignes et les surfaces du second ordre* (*Annales de Gergonne*, vol. VI, p. 257; et vol. VII, p. 97).

Donc :

Une série linéaire de cercles est formée d'une infinité de cercles qui ont deux points réels ou imaginaires communs et dont les centres se trouvent, par conséquent, sur une droite.

b. Dans une série linéaire de cercles, il y en a un qui se réduit à une droite, c'est le cercle de rayon infini qui correspond au plan du faisceau (l) passant par P. Cette droite s'appelle l'*axe radical* de la série, elle contient les deux points communs aux cercles de la série.

De même, il y a dans une série linéaire deux cercles de rayon nul, qui correspondent aux plans tangents à Q menés par l. On a ainsi les *points limites* de la série (Poncelet) qui sont réels ou imaginaires, selon que les points communs à tous les cercles de la série sont imaginaires ou réels. Ces points limites se trouvent sur la droite des centres de la série.

c. Cas spéciaux. — Si l'axe l du faisceau de plans touche la quadrique Q, la série linéaire est formée de tous les cercles qui se touchent au même point, qui correspond au point de contact de l avec Q. L'axe radical est la tangente commune aux cercles et les points limites coïncident avec le point de contact.

Si l passe par P, on a un faisceau de droites.

Si l est situé sur le plan α tangent en P à la quadrique, on aura une série linéaire formée de tous les cercles qui ont un même centre. Dans ce cas, l'axe radical est à l'infini, et la droite des centres est indéterminée.

d. Exemples. — 1° Les cercles qui coupent orthogonalement deux cercles fixes γ, γ' forment une série linéaire, qui est représentée par le faisceau des plans réciproques par rapport à Q, de ceux qui passent par

l'intersection des plans Γ, Γ' correspondant à γ, γ'. Cette série linéaire et celle déterminée par γ, γ' peuvent s'appeler *séries réciproques* de cercles. L'axe radical de l'une est la ligne des centres de l'autre; les points limites de l'une sont les points où se coupent tous les cercles de l'autre.

2° On voit aisément que les cercles conjugués de deux cercles γ, γ', ont pour corde commune la droite symétrique de l'axe radical de γ, γ' par rapport au milieu de la distance des centres. Cette droite s'appelle *axe antiradical* de γ et γ'. On déduit que les cercles qui coupent diamétralement deux cercles fixes γ, γ', forment une série linéaire dont la centrale est l'axe antiradical de γ, γ' et dont l'axe radical est la centrale de $\gamma\gamma'$ (n° 2, *b*). Étant donnés trois cercles γ, γ', γ'', les trois séries linéaires que l'on a en considérant les trois couples $\gamma\gamma'$, $\gamma'\gamma''$, $\gamma''\gamma$, ont un cercle commun dont le centre est le point où se coupent les trois axes antiradicaux.

Donc :

Étant donnés trois cercles quelconques, il existe un cercle qui les coupe diamétralement.

3° Étant données deux coniques λ, λ', les cercles qui sont circonscrits à un triangle autopolaire par rapport à λ et à un triangle autopolaire par rapport à λ' forment une série linéaire (n° 3, *d*).

5. *Correspondance entre la géométrie de la droite de l'espace, et la géométrie des séries linéaires de cercles du plan.* — On peut dire qu'une série linéaire de cercles correspond à la droite commune l de tous les plans correspondant aux cercles de la série; par conséquent à toute droite l de l'espace correspond une série linéaire de cercles, et réciproquement; à tout théorème

sur l'espace réglé correspond un théorème sur les séries linéaires de cercles. Nous donnons des exemples. A deux droites qui se coupent correspondent sur le plan π deux séries linéaires qui ont un cercle commun ; à deux droites réciproques par rapport à Q_1 correspondent deux séries réciproques. Étant données deux séries linéaires qui n'ont aucun cercle commun et un cercle γ, on peut construire une série linéaire qui contient γ et qui a un cercle commun avec chacune des deux séries, etc.

Notes et exercices. — 1° *Comment faut-il interpréter les formules* (2) *pour avoir la projection stéréographique? Dans quel cas la quadrique* Q *est-elle un paraboloïde de révolution?*

2° *On peut déduire, par des considérations dans l'espace, tous les théorèmes sur le cercle dans le plan. Comme exercice, on pourrait démontrer les beaux théorèmes de Miquel* (*Journal de Liouville*, vol. 3, 9, 10).

3° *A toute configuration harmonique dans l'espace* (voir *les Mémoires de Stéphanos, Reye, Veronese, etc.*) *correspond une configuration harmonique de cercles; étude de cette configuration.*

4° *Étude de deux quadruples de cercles correspondant à deux tétraèdres homologiques, ou bien à deux tétraèdres de Möbius.*

5° *Cercles qui séparent harmoniquement un ou deux couples de points. Construction du cercle qui coupe harmoniquement trois couples de points.*

6° *Cercles pour lesquels un point et une droite sont réciproques. Etant donnés deux points* A, B *et deux droites* a, b, *dans quel cas pourra-t-on construire un cercle pour lequel les points* A, B *sont les pôles des droites* a, b?

7° *Étudier la figure correspondant à un pentagone ou à un hexagone autopolaire par rapport à* Q (voir *Serret : Géométrie de direction*).

8° Problèmes divers. — *Construire un cercle qui coupe orthogonalement deux cercles* γ, γ' *et diamétralement un troisième cercle* γ''. *Construire un cercle qui passe par deux points et qui coupe diamétralement ou orthogonalement un cercle donné* γ, *etc.*

9° *A toute droite* l *de l'espace, on peut faire correspondre la droite* l' *des centres de la série linéaire* L′ *qui est l'image du faisceau de plans* (l); *réciproquement, à toute droite* l' *du plan* π *correspondent* ∞^2 *droites de l'espace; ces droites passent par un point* L *du plan* α *tangent en* P *à la quadrique* Q. *La correspondance entre les droites* l' *et les points* L *est une homographie.*

10° *A tout point* O *de* π *correspond une droite* o *de* α *qui est l'axe du faisceau des plans correspondant aux cercles de centre* O; *la correspondance entre les points* O *et les droites* o *est une homographie. Relation entre cette homographie et celle de l'exemple précédent.*

11° *Etant données quatre séries linéaires de cercles, on peut, en général, construire deux autres séries qui ont un cercle commun avec toutes les séries données.*

II. — Réseaux et séries quadratiques de cercles.

6. Une équation homogène et du second degré

$$\sum_1^3 a_{ij} u_i u_j = 0$$

définit dans l'espace une quadrique-enveloppe M′ et dans le plan π un réseau quadratique M de cercles,

c'est-à-dire un réseau qui a deux cercles communs avec une série linéaire quelconque de cercles. On peut donc rapprocher les propriétés de ces réseaux de celles des quadriques.

Un réseau quadratique est complètement déterminé par neuf de ses cercles. La construction peut se déduire de celle que l'on connaît pour les quadriques.

7. Si la quadrique M′ est elliptique le réseau ne contient pas des séries linéaires réelles de cercles; au contraire, si M′ est hyperbolique, le réseau contient deux systèmes ∞^1 de séries linéaires de cercles; les séries du même système n'ont aucun cercle commun, tandis que les séries de systèmes différents ont un cercle commun. La discussion dépend des coefficients a_{ij} et coïncide avec la discussion des quadriques.

On peut appeler le réseau M *elliptique* ou *hyperbolique,* selon que la quadrique M′ est elliptique ou hyperbolique. Étant données trois droites de l'espace, on peut toujours construire l'hyperboloïde qui les contient; de même, étant données trois séries linéaires de cercles, qui deux à deux n'ont aucun cercle commun, on peut construire le réseau hyperbolique qui les contient (n° 5).

Après cela l'extension des théorèmes de Hesse sur les groupes de droites d'un hyperboloïde est immédiate.

8. Il y a ∞^2 faisceaux de cercles qui ont un seul cercle commun avec un réseau quadratique M; ils correspondent à la congruence des tangentes à la quadrique M′. Par tout cercle du plan passent ∞^1 de ces faisceaux qui correspondent aux tangentes de M′ situées dans le plan dont le cercle donné est l'image.

Par rapport à un réseau quadratique de cercles, on peut établir une théorie analogue à celle de la polarité

par rapport à une quadrique. Pour cela, on peut parler du réseau linéaire polaire d'un cercle par rapport à un réseau quadratique M; des réseaux linéaires réciproques par rapport à M; des quadruples de cercles autopolaires par rapport à M, etc.

9. Dans un réseau quadratique M, il y en a ∞^1 dont le rayon est nul; ils correspondent aux plans de la développable commune aux deux quadriques M′ et Q; cette développable touche la quadrique Q suivant une courbe gauche du quatrième ordre L'_4 qui est l'intersection de Q et de la polaire réciproque de la quadrique-enveloppe M′ par rapport à Q. En projetant cette courbe, qui en général ne passe pas par P, on aura le lieu des points du réseau quadratique, et c'est une courbe du quatrième ordre L_4 qui passe deux fois par les points cycliques du plan π. En effet, tout cercle de π coupe L_4 en 4 points au lieu de 8.

Les cercles de rayon infini du réseau correspondent aux plans tangents à la quadrique M′ menés par P; donc ils enveloppent une conique L_2.

Si le réseau est hyperbolique, on peut dire que les points-limites de ses ∞^1 séries linéaires sont sur une *quartique bicirculaire,* et les axes radicaux de ces mêmes séries enveloppent une conique.

10. *Cas spéciaux.* — Un réseau quadratique M peut se spécialiser, ou quand la quadrique M′ se spécialise elle-même, ou lorsque M′ se trouve dans une position particulière par rapport à la quadrique Q.

a. Si la quadrique M′ se réduit à une conique enveloppe de plans, on aura un réseau *singulier* qui se compose de ∞^1 faisceaux de cercles dont les axes radicaux touchent une conique, et qui ont un cercle com-

mun qui correspond au plan de la conique M'. Ce cercle peut s'appeler *cercle double du réseau,* car toute série linéaire qui le contient coupe le réseau quadratique en un seul cercle.

La courbe L_4 dans ce cas ne présente aucune spécialité. Il y a pourtant une exception : si la conique M' se trouve sur la quadrique Q, le réseau M se compose de tous les cercles qui touchent un même cercle γ, la courbe L_4 se réduit à ce cercle compté deux fois, et la courbe L_2 est le même cercle considéré comme enveloppe de ses tangentes.

Si la quadrique M' se réduit en un couple de points, le réseau quadratique se réduit à deux réseaux linéaires qui peuvent aussi coïncider; la courbe L_4 se réduit aux deux cercles orthogonaux des deux réseaux linéaires et la conique L_2 se réduit à un couple de points.

b. Si les quadriques M', Q ne se trouvent pas en position générale, on peut distinguer plusieurs cas différents (*voir* l'article de M. Andoyer dans les *Nouvelles Annales,* avril 1896). On pourrait trouver ce qui arrive pour le réseau M dans chacun de ces cas. Nous donnerons quelques exemples.

1° Si la quadrique M' touche le plan α, la L'_4 passera par P et la courbe L_4 devient une cubique circulaire. Dans ce cas, la conique L_2 est une parabole, car le plan α est parallèle à π.

2° Si M' et Q se touchent en deux points A, B, la courbe L_4 se compose de la droite qui unit les projections de A, B et d'une cubique circulaire.

3° Si M' et Q se touchent en un seul point A la courbe L_4 possède trois points doubles : les points cycliques et la projection de A.

4° Si M' et Q se touchent le long d'une conique γ la courbe L_4 se réduit à un cercle compté deux fois.

11. *Exemples.* — 1° Les cercles conjugués des cercles d'un réseau linéaire A forment un réseau quadratique, qui correspond à la quadrique M′ que l'on déduit du point-enveloppe A avec la transformation quadratique T (n° 2, *c*).

2° Les cercles qui ont un même rayon r forment un réseau quadratique elliptique dont l'équation est

$$(u_3 - u_4)r^2 = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

3° Les cercles tangents à un cercle fixe γ forment un réseau quadratique singulier (n° 10, *a*); le cercle double est γ.

4° Les cercles qui déterminent sur un cercle fixe des cordes de longueur constante.

5° Les cercles qui coupent un cercle fixe γ sous un angle constant $\alpha (\alpha \neq 90^\circ)$ forment un réseau hyperbolique dont l'équation est (¹)

$$\begin{aligned}(u_1 - u'_1)^2 + (u_2 - u'_2)^2 \\ = u_1^2 + u_2^2 + u_3 - u_4 + u'^2_1 + u'^2_2 + u'_3 - u'_4 \\ - 2(u_1^2 + u_2^2 + u_3 - u_4)(u'^2_1 + u'^2_2 + u'_3 - u'_4)\cos\alpha,\end{aligned}$$

où les u'_i sont les coordonnées de γ et α l'angle donné.

En simplifiant, on trouve

$$(4) \quad 2\cos\alpha = \frac{2u_1u'_1 + 2u_2u'_2 + u_3 - u_4 + u'_3 - u'_4}{(u_1^2 + u_2^2 + u_3 - u_4)(u'^2_1 + u'^2_2 + u_3 - u_4)}.$$

6° Les cercles qui sont coupés diamétralement par un cercle fixe γ, etc.

12. Aux points K′ d'une quadrique-enveloppe M′ correspondent des réseaux linéaires de cercles; les cercles orthogonaux de ces réseaux forment un réseau quadra-

(¹) On suppose $u_3 + u_4 = 1$ (n° 1).

tique M_1 de cercles qui correspond à la quadrique M'_1 polaire réciproque de M' par rapport à Q. Les réseaux M, M_1 peuvent s'appeler *réciproques;* s'ils contiennent des séries linéaires réelles, les séries de M sont réciproques des séries correspondantes de M_1.

Les cercles qui sont coupés diamétralement par un cercle fixe γ forment un réseau quadratique réciproque du réseau des cercles conjugués des cercles d'un réseau linéaire (exemple : 1° et 6° du numéro précédent).

13. *Séries quadratiques de cercles.* — Les cercles communs à un réseau quadratique M et à un réseau linéaire A forment une série quadratique de cercles, qui est représentée dans l'espace par le cône K tangent à la quadrique M', conduit par le point A' correspondant au réseau A.

Les cercles d'une série quadratique enveloppent une courbe qui est la projection de la courbe d'intersection du cône K et de la quadratique Q; les centres sont sur une conique qui est la projection de la courbe polaire réciproque du cône considéré comme enveloppe, par rapport à Q. Tous les cercles de la série coupent orthogonalement un même cercle qui correspond au plan polaire de A' par rapport à Q.

Donc : *une série quadratique de cercles se compose de ∞^1 cercles qui ont les centres sur une section conique et qui coupent orthogonalement un cercle fixe. Ils enveloppent une quartique bicirculaire.*

Dans une série quadratique de cercles, il y en a deux qui se réduisent à des droites; ils correspondent aux plans tangents au cône K menés par P.

De même, il y a dans la série quatre cercles de rayon nul; ils correspondent aux quatre plans tangents com-

muns aux deux cônes dont le sommet est A′ et dont l'un touche M′ et l'autre Q.

On peut noter divers cas particuliers, selon la position du cône K par rapport à Q. Lorsque le point A, sommet du cône K, se trouve sur la quadrique Q et une génératrice rectiligne du cône passe par P, la courbe d'intersection de K avec Q passe par P, et la conique polaire réciproque du cône-enveloppe K par rapport à Q touche le plan α. Par conséquent, l'enveloppe des cercles de la série est une cubique circulaire et la conique des centres est une parabole. On déduit que : *Les cercles qui passent par un même point et qui ont leurs centres sur une parabole enveloppent une cubique circulaire.*

Un autre cas particulier intéressant est celui où le point A se trouve sur le plan α; alors la ligne des centres se réduit à une droite.

14. *Faisceau de réseaux quadratiques.* — Deux réseaux quadratiques M et M_1 ont en commun ∞^1 cercles qui forment une série biquadratique de cercles qui correspond à la développable commune aux deux quadriques M′ et M'_1. Ils enveloppent une courbe circulaire du huitième ordre et leurs centres sont sur une quartique.

A un faisceau tangentiel de quadriques M′ correspond un faisceau de réseaux quadratiques qui ont une même série biquadratique commune.

Dans un faisceau tangentiel de quadriques il y en a quatre qui se réduisent à des coniques-enveloppes, donc dans un faisceau de réseaux quadratiques il y en a quatre singuliers. Les quatre cercles doubles correspondent aux faces d'un tétraèdre autopolaire par rapport à toutes les quadriques du faisceau.

En considérant le faisceau tangentiel des deux

quadriques Q et M′, on aura le théorème suivant :

Une quartique bicirculaire peut être considérée de quatre manières différentes comme l'ensemble des points d'un réseau quadratique singulier.

Notes et exercices. — 1° *Étude de la transformation quadratique* T (n° 2, c). *Résoudre les questions suivantes en appliquant les propriétés de cette transformation : a. Trouver la propriété caractéristique des réseaux quadratiques pour lesquels il existe un cercle qui coupe diamétralement les cercles du réseau; b. Étant donné un cercle* γ, *on peut construire le réseau linéaire* L *des cercles qui sont coupés orthogonalement par* γ, *et le réseau quadratique* M *des cercles qui sont coupés diamétralement par* γ; *trouver les relations entre ces deux réseaux.*

2° *Démontrer que les deux systèmes de séries linéaires qui sont comprises dans le réseau quadratique de l'exemple 5° du n° 11 correspondent à des droites tangentes à la quadrique* Q.

3° *Étudier le réseau quadratique des cercles pour lesquels deux droites données sont réciproques.*

4° *Soient* α, β, γ, δ *quatre cercles;* α', β', γ', δ' *les cercles orthogonaux des ternes* $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$. *Démontrer que les quatre faisceaux de cercles* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ *appartiennent, en général, à un réseau quadratique.*

5° *Étudier la série des cercles qui sont coupés diamétralement par deux cercles fixes.*

6° *Les cercles qui passent par un point et qui touchent un cercle* γ, *touchent un autre cercle* γ'.

7° *Les séries linéaires qui ont un cercle commun et qui sont tangentes à un réseau quadratique forment un réseau quadratique singulier* (n° 8).

III. — Application au problème d'Apollonius.

15. *Système de deux cercles.* — Soient donnés deux cercles u'_i, u''_i; il y a ∞^2 cercles qui les coupent sous des angles égaux et qui s'appellent les *cercles isogonaux* du système. En appliquant la formule (4) du n° 11, on trouve pour les cercles isogonaux u_i l'équation

$$\frac{2u_1u'_1 + 2u_2u'_2 + u_3 - u_4 + u'_3 - u'_4}{(u_1^2 + u_2^2 + u_3 - u_4)(u'^2_1 + u'^2_2 + u'_3 - u'_4)}$$
$$= \pm \frac{2u_1u''_1 + 2u_2u''_2 + u_3 - u_4 + u''_3 - u''_4}{(u_1^2 + u_2^2 + u_3 - u_4)(u''^2_1 + u''^2_2 + u''_3 - u''_4)}.$$

Par conséquent, ils forment deux réseaux linéaires L′, L″. Les plans correspondants dans l'espace passent par deux points dont les projections sur π sont les centres l', l'' des cercles orthogonaux λ', λ'' des deux réseaux. Chaque droite qui passe par l' ou l'' coupe les deux cercles u'_i, u''_i en quatre points qui déterminent des séries linéaires de cercles appartenant aux réseaux. On déduit facilement que les points l', l'' sont les centres de similitude des cercles u', u'' et que les cercles λ', λ'' sont les cercles radicaux intérieur et extérieur du système u', u''. Considérons les réseaux quadratiques M′, M″ des cercles tangents à u', u''. Les quadriques correspondantes se réduisent à des coniques de Q et, par conséquent, leur développable commune se réduit à deux cônes. Puisque les cercles tangents à u' et u'' sont isogonaux à ces cercles, ils appartiennent aussi aux deux réseaux L′ et L″ et, par conséquent, les sommets des deux cônes sont les centres des deux gerbes de plans correspondant aux réseaux L′, L″. *Donc les cercles tangents à deux cercles u', u'' forment deux séries quadratiques de cercles dont les cercles orthogonaux sont les cercles radicaux du système u', u''.*

16. *Système de huit cercles associés.* — Trois équations des degrés m, n, p déterminent un système de m, n, p cercles. Le cas où $m = n = p = 2$ est particulièrement intéressant. On a alors un groupe de huit cercles communs à trois réseaux quadratiques et que l'on peut appeler *système de huit cercles associés.* Les propriétés de ce système peuvent se déduire des propriétés de huit plans tangents communs à trois quadriques; par conséquent, sept cercles du système déterminent le huitième, et l'on peut le construire en traduisant sur le plan les constructions que l'on connait pour l'espace.

Exemple. — Des théorèmes de *Hesse* on déduit que deux quadruples de cercles autopolaires par rapport à un réseau quadratique forment un système de huit cercles associés; et réciproquement, si deux quadruples de cercles forment un système associé, elles sont autopolaires par rapport à un même réseau quadratique.

17. Si les trois quadriques se réduisent à trois coniques u', u'', u''' considérées comme enveloppes de plans, les huit plans tangents communs forment un système remarquable auquel correspond sur le plan π le système des huit cercles tangents aux trois cercles images des coniques u', u'', u'''.

Donc, on pourra obtenir la solution du problème d'Apollonius par des considérations dans l'espace.

18. Soient u'_i, u''_i, u'''_i les cercles correspondant aux coniques u', u'', u'''; on pourra former les trois couples $u'_i u''_i$, $u''_i u'''_i$, $u'''_i u'_i$. Chacun de ces couples donne lieu à deux centres de similitude; on a ainsi six points dont nous voulons étudier la position.

Les arêtes du trièdre des plans des coniques u', u'', u'''

coupent la quadrique aux couples de points AA′, BB′, CC′; les points AA′ sont communs aux coniques u', u'', les points BB′ aux coniques u'', u''', et les points CC′ aux coniques u''', u'. Les sommets des six cônes sont

$$V_1 \equiv AB.A'B', \quad V_3 \equiv AC.A'C', \quad V_5 \equiv BC.B'C',$$
$$V_2 \equiv AB'.A'B, \quad V_4 \equiv AC'.A'C, \quad V_6 \equiv BC'.B'C.$$

On voit immédiatement que ces points sont trois par trois sur quatre droites intersection des couples de plans :

$$\begin{array}{cccc} ABC & AB'C & A'BC & ABC' \\ A'B'C' & A'BC' & AB'C' & A'B'C \end{array}$$

De là on déduit que *les six centres de similitude d'un système de trois cercles sont trois par trois sur quatre droites*. Ces droites s'appellent les *axes de similitude* du système.

19. Considérons un plan qui passe par les trois points V_1, V_3, V_5 en ligne droite ; le cercle correspondant doit couper isogonalement u'_i, u''_i et u'_i, u_i et par conséquent coupe isogonalement les trois cercles donnés. On a ainsi quatre faisceaux de plans auxquels correspondent quatre séries linéaires de cercles isogonaux à u'_i, u''_i, u'''_i.

Donc : *les cercles isogonaux à trois cercles donnés forment quatre séries linéaires dont les axes radicaux sont les quatre axes de similitude.*

20. *Solution du problème d'Apollonius.* — Les huit plans tangents communs aux coniques u', u'', u''' sont les plans tangents communs aux six cônes dont les sommets sont les points $V_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Donc ces huit plans passent deux par deux par les quatre droites que nous venons de trouver (n° 18).

Par conséquent les huit cercles tangents aux cercles

donnés appartiennent deux à deux aux quatre faisceaux des cercles isogonaux (n° 19).

De là on déduit une construction du problème d'Apollonius différente de celle de Gergonne.

Nous n'insistons pas sur cette construction qui se trouve exposée dans un intéressant Mémoire de M. Fouché inséré dans les *Nouvelles Annales* (¹). Dans le même Volume de ce Journal, on trouvera un Mémoire de M. Lemoine qui contient l'analyse comparée des solutions de Viète, Gergonne, Fouché et Mannheim, en appliquant les principes de la Géométrographie.

Notes et exercices. — 1° *Il y a huit cercles isogonaux à quatre cercles donnés* α, β, γ, δ. *Si* α', β', γ', δ' *sont les cercles orthogonaux des systèmes* $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$, *ces cercles et les huit cercles isogonaux forment une configuration harmonique de cercles (exemple 3° du paragraphe I).*

2° *A un tétraèdre autopolaire par rapport à la quadrique* Q *correspond une quadruple de cercles orthogonaux deux à deux. Ces cercles peuvent se considérer comme les cercles conjugués des quatre triangles que l'on peut former avec un quadrilatère orthogonal. Propriétés de ce système.*

3° *Si l'on a deux quadrilatères orthogonaux les deux quadruples de cercles correspondantes forment un groupe de huit cercles associés.*

4° *Les cercles doubles des quatre réseaux singuliers d'un faisceau de réseaux quadratiques sont orthogonaux deux à deux.*

(¹) *Sur les cercles qui touchent trois cercles donnés ou qui les coupent sous un angle donné* (*Nouvelles Annales*, 1872).

5° *Construire un cercle isogonal à trois cercles donnés et qui passe par un point.*

6° *Étude de la série des cercles qui coupent deux cercles fixes sous des angles constants.*

7° *Déduire la construction du problème de Steiner : construire les cercles qui coupent trois cercles donnés sous des angles donnés.*

Notice historique.

Les recherches de *Poncelet* (*Traité des propriétés projectives des figures*) et de *Steiner* [*Einige geometrische Beobachtungen* (*Journal de Crelle*, vol. 1)] établissent les propriétés principales du système de deux et de trois cercles. Dans le Mémoire de Steiner se trouve, en outre, la solution de plusieurs problèmes, parmi lesquels le problème d'*Apollonius* et celui de *Malfatti*. Pour le problème d'Apollonius, on connaissait déjà la solution de *Gergonne*.

La représentation d'une quadrique sur le plan a été découverte par *Chasles*. Elle permet de déduire, des propriétés de la quadrique, les propriétés d'un système de coniques du plan qui passent par deux points, et *vice versa*.

Lorsque ces deux points sont les points cycliques, on aura les cercles du plan. Un cas particulier est la représentation stéréographique de la sphère. L'application de cette représentation à l'étude des cercles du plan se trouve dans un intéressant Mémoire de *Thomæ* [*Das ebene Kreissysteme und seine Abbildung auf den Raum* (*Zeitschr. für Math.*, vol. XXIX, 1884)]. Dans ce Mémoire se trouve pour la première fois l'étude des réseaux quadratiques de cercles.

Les propriétés des réseaux quadratiques de cercles

peuvent servir pour l'étude des cubiques et des quartiques circulaires : Voir le Mémoire de *G. Loria* (*Remarques sur la géométrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du quatrième ordre*) (*Quarterly Journal*, vol. XXII, 1887)].

Parmi les autres Mémoires qui traitent du cercle dans le plan, je noterai le Mémoire de *Fouché* déjà cité, un Mémoire de *Hosfeld* (*Ueber die mit der Lösung einer Steiner'schen Aufgabe zusammenhangende Cfz* [$1_2 6$ 16_3], *Zeit. für Math.*, vol. XXIX) qui traite de la configuration harmonique de cercles, et le Mémoire de *Ciamberlini* (*Sulla rappresentazione dei punti di un piano con i punti d'un paraboloide ellittico*) où se trouve exposée une particulière représentation des cercles du plan.

On peut aussi ajouter les Mémoires de *Müller* et de *Mehmke* qui ont appliqué les principes de Grassman (voir : *Monatshefte für Math.*, vol. III, et *Zeitsch. für Math.*, vol. XXV).

[M'3]

REMARQUES SUR QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE;

PAR M. CHARLES MICHEL,
Agrégé de l'Université.

1. Je me propose de montrer quels rapprochements peuvent être établis entre plusieurs théorèmes généraux, de nature différente, énoncés par Chasles, Liouville et Laguerre, complétés et généralisés par M. Georges Humbert, dans un important Mémoire sur les applica-

tions géométriques du théorème d'Abel (*Journal de Mathématiques*, 1887).

Soient, sur une droite fixe, trois points fixes A, B, C et un système de n points $P_1, P_2, \ldots, P_n$, variant avec la condition que le produit des n rapports anharmoniques $(P_i CAB)$ soit constant. Si nous désignons par a, b, c les paramètres des points A, B, C sur la droite donnée et par t_i le paramètre du point P_i, le rapport anharmonique $(P_i CAB)$ est égal à

$$\frac{t_i - a}{t_i - b} : \frac{c - a}{c - b},$$

et l'on voit que la condition donnée revient à celle-ci :

$$\prod_{i=1}^{i=n} \frac{t_i - a}{t_i - b} = U,$$

U étant une quantité constante.

Que devient cette condition, si l'on suppose que le point B tende à se confondre avec le point A? Pour le voir, posons $b = a + h$. La relation précédente s'écrit alors

$$\prod_{i=1}^{i=n} \left(1 + \frac{h}{t_i - b}\right) = U,$$

ou, si l'on développe le premier membre suivant les puissances successives de h,

$$1 + h \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{t_i - b} + \ldots = U,$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{t_i - b} \ldots = \frac{U - 1}{h}.$$

Faisons tendre h vers o et passons à la limite. Si L

désigne la valeur de $\frac{U-1}{h}$, la relation devient

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{t_i - b} = L,$$

et elle exprime que le pôle harmonique du système des n points variables par rapport au point A est un point fixe.

La dégénérescence de la première condition géométrique en la seconde était connue de Poncelet, qui s'en est servi, dans son *Analyse des Transversales*, pour déduire du théorème de Carnot, sur les transversales, le théorème de Côtes, sur la polaire harmonique d'un point par rapport à une courbe algébrique. C'est dans le même ordre d'idées que nous allons déduire d'une série de théorèmes énoncée par Laguerre et complétée par M. Humbert une autre série énoncée par Liouville et complétée aussi par M. Humbert, dans le Mémoire déjà cité.

2. Laguerre a énoncé le théorème suivant :

(1) *L'orientation du système des tangentes communes à deux courbes algébriques ne varie pas quand on remplace l'une des deux par une courbe qui lui est homofocale* (*Bulletin de la Société philomathique*, 1870).

De ce théorème on déduit le cas particulier suivant, énoncé aussi par Laguerre :

(2) *L'orientation du système des tangentes menées d'un point à une courbe algébrique est égale à l'orientation du système des droites qui joignent ce point aux foyers réels de la courbe* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1865).

D'autre part, on doit à M. Humbert un théorème sur les faisceaux tangentiels de courbes algébriques :

(3) *Les orientations des systèmes des tangentes menées à deux courbes de classe n par un foyer d'une courbe du faisceau tangentiel qui contient ces deux courbes sont égales* (*Journal de Mathématiques*, 1887 : *American Journal of Mathematics*, 1888).

Voici un quatrième énoncé, qui n'est d'ailleurs qu'une combinaison des précédents :

(4) *L'orientation du système des tangentes communes à une courbe fixe et à une courbe variable d'un faisceau tangentiel reste constante, si chaque foyer réel de la courbe fixe est foyer d'une courbe du faisceau tangentiel.*

En effet, soient $F_1, F_2, \ldots, F_k$ les foyers réels de la courbe fixe (Γ). D'après le théorème de Laguerre, l'orientation du système des tangentes communes à la courbe (Γ) et à une courbe (C) du faisceau tangentiel est égale à l'orientation du système des tangentes menées des points $F_1, F_2, \ldots, F_k$ à la courbe (C). Mais, puisque chacun de ces points est foyer d'une courbe du faisceau tangentiel, d'après le théorème de M. Humbert, l'orientation du système des tangentes menées de l'un d'eux à la courbe (C) reste la même quand la courbe (C) varie dans le faisceau. L'orientation du système des tangentes menées de tous les points F à la courbe est donc elle-même constante, et le théorème est établi.

En particulier, on peut supposer que les foyers réels de la courbe fixe sont foyers d'une *même* courbe du faisceau tangentiel, et on a alors le théorème suivant, dû à M. Humbert :

(5) *Les deux systèmes de tangentes respectivement*

communes à deux courbes algébriques de même classe et à une courbe algébrique quelconque ont même orientation, si, parmi les courbes du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières, il en est une qui admette pour foyers tous les foyers de la dernière (*Journal de Mathématiques*, 1887).

Le théorème (4) comprend les théorèmes (1), (2), (3) et (5) comme cas particuliers. En effet, le théorème (5) est un cas particulier du théorème (4); mais, si, dans le théorème (5), on prend comme faisceau tangentiel un faisceau qui contient deux courbes homofocales, toutes les courbes du faisceau sont homofocales. L'une d'elles se décompose en une courbe de classe $n-2$, et en deux points qui sont les points cycliques du plan. Un point quelconque du plan peut être considéré comme un foyer de ce système de deux points (Humbert, *American Journal*, 1888), et ainsi les foyers d'une courbe quelconque peuvent être considérés comme des foyers d'une courbe du faisceau. On obtient alors le théorème de Laguerre, dont le théorème (2) est un cas particulier. Enfin, il est clair que le théorème (3) est une forme particulière du théorème (4).

3. Nous avons ainsi une série de théorèmes dans lesquels un système de droites varie en conservant une orientation constante. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les points où les n droites de ce système variable rencontrent la droite de l'infini, A et B les points cycliques, et C le point à l'infini de la droite fixe, quelconque d'ailleurs, qui sert d'origine des angles. D'après la formule de Laguerre, qui permet d'exprimer l'angle de deux droites par le rapport anharmonique de ces deux droites avec les droites isotropes de leur point de rencontre, on voit

que le produit des n rapports anharmoniques (P_iCAB) a une valeur constante.

Sous cette forme projective, on peut supposer que les points A et B sont, non plus les points cycliques, mais deux points quelconques du plan. Supposons alors que le point B, jusqu'à présent distinct du point A, vienne se confondre avec le point A sur la droite qui les joint. D'après le principe que j'ai établi au début, on voit que le système des points variables $P_1, P_2, \ldots, P_n$ varie de façon que son pôle harmonique par rapport au point A soit un point fixe. Mais, les deux points A et B étant confondus, la droite qui les joint devient une droite arbitraire passant par le point A. On voit ainsi que le système des droites variables devient un système de droites variant de façon que sa polaire harmonique par rapport au point A soit une droite fixe.

Dans cette dégénérescence, les tangentes communes à deux courbes restent les tangentes communes à deux courbes; mais les n foyers réels d'une courbe de classe n doivent être remplacés par les points de contact des n tangentes menées du point A à la courbe. Transformons maintenant par polaires réciproques de façon que le point A devienne la droite de l'infini. Les points de contact des tangentes menées à une courbe du point A se changent en les asymptotes de la courbe transformée. Si nous remarquons que le pôle harmonique d'un système de points par rapport à la droite de l'infini n'est autre que le centre des moyennes distances de ces points, nous voyons apparaître, comme dégénérescence d'un théorème où un système de droites variables a une orientation constante, un autre théorème où un système de points variables a un centre des moyennes distances fixe.

Les cinq théorèmes que nous avons énoncés nous

donnent ainsi cinq autres théorèmes que l'on n'a pas encore pensé à rapprocher des premiers.

(1') *Le centre des moyennes distances des points de rencontre de deux courbes algébriques ne varie pas quand on remplace l'une des deux par une autre qui a les mêmes asymptotes.* (LIOUVILLE, *Journal de Mathématiques*, 1841.)

(2') *Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une droite et d'une courbe algébrique coïncide avec le centre des moyennes distances des points de rencontre de cette droite avec les asymptotes de la courbe.*

(3') *Les centres des moyennes distances des deux systèmes de points de rencontre de deux courbes algébriques par une asymptote d'une courbe du faisceau ponctuel qui contient les deux courbes coïncident.* (HUMBERT, *Journal de Mathématiques*, 1887.)

(4') *Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe fixe et à une courbe variable d'un faisceau ponctuel reste fixe, si chaque asymptote de la courbe est asymptote à une courbe de faisceau.* (HUMBERT, *Journal de Mathématiques*, 1887.)

(5') *Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe fixe et à une courbe variable d'un faisceau ponctuel reste fixe, si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admette pour asymptotes toutes les asymptotes de la première courbe.* (HUMBERT, *loc. cit.*)

Le théorème (4') peut se déduire des théorèmes (1') et (3'), comme le théorème (4) peut se déduire des théorèmes (1) et (3). On peut aussi regarder les théorèmes (1'), (2'), (3') et (5'), comme des cas particuliers du théorème (4').

4. Je signalerai, pour terminer, une correspondance analogue entre le théorème (2), que nous avons énoncé, et le théorème suivant, dû à Chasles :

Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles à une même direction, menées à une courbe algébrique, reste fixe quand cette direction varie.

J'ai rappelé, en effet, sans y insister, que Poncelet avait déduit le théorème de Côtes sur la polaire harmonique d'un point par rapport à une courbe algébrique comme une forme dégénérée du théorème de Carnot, sur les transversales, dans le cas où le polygone transversal se réduit à un triangle. Or, si l'on transforme par polaires réciproques le théorème de Côtes, de façon que le point se change en la droite de l'infini, on obtient justement l'énoncé du théorème de Chasles, et si l'on transforme le théorème de Carnot par polaires réciproques, de façon que deux des côtés du triangle transversal deviennent les points cycliques du plan, on obtient l'énoncé du théorème (2) de Laguerre. Le théorème de Chasles est donc une forme dégénérée du théorème de Laguerre, comme le théorème (2') est une dégénérescence du théorème corrélatif du théorème de Laguerre.

[Q4b]

CARRÉS MAGIQUES SUPÉRIEURS;

PAR M. GASTON TARRY.

Dans les cases d'un échiquier dont la base n est un nombre impair composé, on peut toujours répartir

les n^2 premiers nombres de telle sorte que la somme des n nombres compris dans chaque rangée horizontale et dans chaque colonne verticale soit constante, et qu'il en soit de même de la somme de leurs carrés.

De plus, ces carrés peuvent être divisés en n rectangles égaux tels que les n nombres de chacun d'eux donnent les mêmes constantes au premier et au second degré.

Je me contente ici de donner un exemple, où $n = 15$:

13	48	91	145	192	20	74	120	154	197	36	82	128	174	220
21	67	113	159	205	43	78	121	176	222	5	59	105	139	182
35	89	135	189	212	6	52	98	144	190	28	63	106	161	207
191	147	193	3	46	109	152	200	29	75	129	175	216	37	83
214	160	201	22	68	131	177	223	33	76	94	137	185	14	60
124	167	215	44	90	99	145	192	7	53	116	162	208	18	61
183	1	56	102	148	209	30	64	107	155	217	38	84	130	171
202	23	69	115	156	213	31	66	132	178	194	15	49	92	140
224	45	70	122	170	187	8	54	100	141	198	16	71	117	163
57	103	138	181	11	62	110	164	210	19	65	126	172	218	39
70	111	157	203	24	87	133	168	211	41	47	95	149	195	4
77	125	179	225	34	55	196	142	188	9	72	118	153	196	26
136	191	12	58	93	165	199	17	65	119	173	219	40	81	127
158	204	25	66	112	166	221	42	88	123	150	184	2	50	104
180	214	32	80	134	143	189	10	51	97	151	206	27	73	108

[P1a]

NOTE RECTIFICATIVE;

PAR M. P. LEFEBVRE.

Dans une Note insérée au numéro de novembre des *Nouvelles Annales* (p. 528; 1899), j'ai indiqué l'existence d'une division de n points sur une droite généralisant la division harmonique. M_1, M_2, M_3, ..., M_k,

$M_{k+1}, \ldots, M_n$ étant ces n points, il existe entre deux de ces points, M_k, M_{k+1}, et deux points fixes imaginaires de la droite, E, F, la relation

$$\frac{M_{k+1}E}{M_{k+1}F} : \frac{M_kE}{M_kF} = K,$$

K étant une racine $n^{\text{ième}}$ primitive de l'unité.

La division harmonique correspondrait au cas où $n = 1$, $K = \pm i$.

Une inadvertance m'a fait dire que « quatre des n points ont pour rapport anharmonique une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, dans les mêmes conditions où les quatre points d'une division harmonique ont pour rapport anharmonique -1 ». Il est clair que le rapport anharmonique de 4 des n points est toujours réel.

Le rapport anharmonique de 4 des n points peut toujours être mis sous la forme

$$H_n = \frac{\sin\frac{\pi}{n}(a+b)\sin\frac{\pi}{n}(b+c)}{\sin\frac{\pi}{n}a\sin\frac{\pi}{n}c},$$

a, b, c étant trois nombres entiers positifs ou négatifs plus petits que n en valeur absolue, et tels qu'aucun des nombres $a+b$, $b+c$ et $a+b+c$ ne soit égal à n.

Inversement toute expression de cette forme peut être regardée comme rapport anharmonique de 4 des n points. C'est le cas pour $2\cos\frac{p\pi}{n}$ et $4\cos^2\frac{p\pi}{n}$ quel que soit le nombre entier p. Toutefois, l'expression ne devra, bien entendu, être ni nulle, ni infinie, ni égale à 1.

H_n n'admet jamais la valeur -1 si n impair, l'admet toujours si n pair. A cette valeur correspondent des groupes de 4 des n points formant division harmonique.

Si n n'est pas premier, H_n admet évidemment toutes les valeurs admises par les expressions H_α, H_β, H_γ, ...

correspondant à ses facteurs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ autres que 2 et 3. Il y aurait donc lieu de distinguer ce que l'on pourrait appeler les valeurs primitives de H_n.

Si n est premier, le nombre de valeurs distinctes admises par H_n est égal au sextuple du nombre pyramidal de côté $\frac{n-3}{2}$; c'est donc $\frac{(n-3)(n^2-1)}{8}$. Elles correspondent 6 par 6 aux divers groupes que l'on peut former avec 4 des n points (4 points donneront 6 rapports anharmoniques).

Pour $n = 5$, on trouve un groupe de valeurs; ce sont $\frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Pour $n = 6$, trois groupes de valeurs : $-1, 2, \frac{1}{2}$; $-2, -\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$; $-3, -\frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}$.

Pour $n = 7$, quatre groupes de valeurs; il suffira d'en citer une de chacun de ces groupes $2\cos\frac{2\pi}{7}$, $2\cos\frac{4\pi}{7}$, $2\cos\frac{6\pi}{7}$ et $2\cos\frac{\pi}{7}$. (Le dernier groupe contient à la fois $2\cos\frac{\pi}{7}$, $2\cos\frac{3\pi}{7}$, $2\cos\frac{5\pi}{7}$ et leurs inverses; l'équation du troisième degré qui donne $2\cos\frac{(2k+1)\pi}{7}$ se transformant en elle-même en remplaçant x par $\frac{1}{1-x}$.)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1899). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

1° *On considère les coniques ayant une direction fixe* D *et passant par deux points fixes* A *et* B. *Deux*

de ces coniques passent par un point donné M *et se coupent en un nouveau point* M′ *qui est dit* associé *au point* M.

On demande d'étudier cette association et plus particulièrement :

a. De déterminer les points M *tels que les points* M′ *associés soient indéterminés;*

b. De trouver le lieu des points M *tels que chacun d'eux soit confondu avec son associé.*

2° *Montrer que si le point* M *décrit une droite quelconque* Δ, *le point associé* M′ *décrit en général une hyperbole* Γ *dont on cherchera les asymptotes. Indiquer les régions de la droite* Δ *qui correspondent aux deux branches de l'hyperbole.*

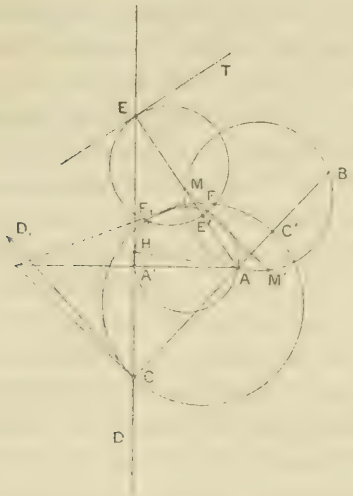
3° *On suppose que la droite* Δ *est placée de telle sorte que la conique* Γ *devienne une parabole et l'on propose de trouver le lieu du foyer de cette parabole lorsque la droite* Δ *se déplace en satisfaisant à cette condition.*

4° *On suppose que la droite* Δ *se déplace de telle sorte que les hyperboles* Γ *correspondantes aient une asymptote commune. On demande, dans ces conditions, de déterminer la courbe enveloppe des axes de symétrie de la conique* Γ.

I. Considérons les coniques S ayant une directrice fixe D et passant par deux points fixes A et B; soient C le point de rencontre de D et AB, C′ le conjugué harmonique de C par rapport à A et B. Si F est le foyer d'une conique S, on sait que la bissectrice de l'angle AFB et celle de son supplément sont FC′ et FC ou FC et FC′; l'angle CFC′ étant droit, on voit que F se trouve, dans les deux cas, sur le cercle de diamètre CC′. De même, si AM rencontre D au point E et si E′ est le conjugué harmonique de E par rapport à A et M, le foyer

d'une conique S passant par A et M se trouve sur le cercle de diamètre EE'. Ces cercles CC', EE' se coupent en deux points F, F_1 réels ou imaginaires. Donc il existe deux coniques ayant D pour directrice, pour foyer correspondant F ou F_1 et passant par A, B, M. Ces co-

Fig. 1.



niques, que je supposerai d'abord *distinctes*, se coupent en un quatrième point M'; les axes de ces coniques sont l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à D et par suite sont respectivement parallèles; il en résulte, d'après une propriété bien connue, que les quatre points A, B, M, M' sont sur un cercle et que MM' est parallèle à la droite D_1 symétrique de AB par rapport à D.

On peut donc trouver le point M' de la façon suivante :

Par les trois points A, B, M, on fait passer un cercle; par le point M, on mène une droite parallèle à D_1 ren-

contrant le cercle ABM au point M′ qui sera dit *associé* au point M.

On peut encore dire : Soient AM′ parallèle à la symétrique de BM par rapport à D et BM′ parallèle à la symétrique de AM par rapport à D, les droites AM′ et BM′ ainsi obtenues se coupent en M′.

Inversement, l'associé de M′ est M. On voit que la directrice D ne sert qu'à fixer la direction D_1.

L'association ainsi définie des points M et M′ suppose que les deux coniques S et S_1 qui passent en M sont distinctes. Si elles sont *confondues,* le point M′, associé à M, est indéterminé, et le point M décrit une courbe de quatrième ordre qui se décompose en une cubique et la droite AB. Pour le voir, nous allons déterminer les points M situés sur une droite AE passant par A et rencontrant D en E. Pour un point M cherché, le cercle de diamètre EE′ est tangent en F au cercle CC′ ; or le cercle EE′ est tangent en E à la perpendiculaire ET à AE, autrement dit passe par deux points de cette perpendiculaire confondus avec le point E ; or on sait qu'il y a deux cercles passant par deux points et tangents à un cercle ; donc sur une droite quelconque AE il y a deux points M, M_1 que nous pouvons construire et autres que A. Je dis maintenant qu'il y a deux positions particulières de la droite mobile AE pour lesquelles un des deux points M, M_1 vient se confondre avec le point A. Le point M, ou M_1 ne peut venir en A que si E′ y vient aussi ; le cercle de diamètre EE′ devient le cercle de diamètre EA passant par la projection A′ de A sur D ; il y a donc autant de droites cherchées AE qu'il y a de cercles passant en A, A′ et tangents au cercle fixe CC′, c'est-à-dire deux ; l'un de ces cercles est évidemment AA′C tangent en C au cercle CC′ ; l'autre, qu'on déduit immédiatement du précédent, rencontre D en un

deuxième point H. On voit donc, en faisant varier la droite AE, que le lieu des points M pour lesquels les coniques S et S_1 sont confondues est une ligne du quatrième ordre, admettant un point double en A, les tangentes en ce point double étant AC et AH. On voit de même que la courbe admet un point double en B, l'une des tangentes en ce point étant BC; la tangente double AB rencontrant la courbe en *six* points appartient au lieu, ce qu'on vérifie d'ailleurs immédiatement, car si M est un point quelconque de AB, C_1 le conjugué harmonique de C par rapport à AM, le cercle de diamètre CC_1 est tangent en C au cercle fixe CC'; le foyer de la conique double correspondante est C et cette conique se décompose en la droite AB et sa symétrique par rapport à D. Le reste du lieu est une cubique passant en A et B, les tangentes en ces points étant AH et BK qu'on trouve comme AH.

Revenons maintenant au cas général où les deux coniques S, S_1 sont distinctes et cherchons :

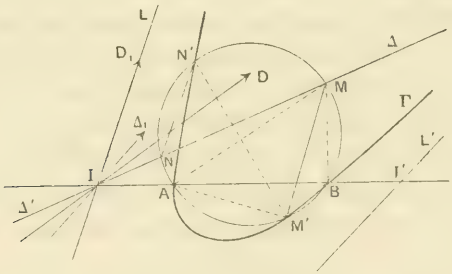
a. Les points M tels que les points M' associés soient indéterminés. Un point M étant choisi, les droites AM' et BM' sont déterminées en même temps que les droites BM et AM. Une de ces dernières ne peut devenir indéterminée que si M est en A ou B : si M est en A, AM est parallèle à D_1 et BM' est indéterminée; si M est en B, BM' est parallèle à D_1 et AM' est indéterminée; il y a donc deux points M, savoir A et B, donnant lieu à une infinité de points M' situés sur les parallèles menées par A et B à D_1.

b. Cherchons maintenant le lieu des points M tels que chacun d'eux soit confondu avec son associé M'; comme AM' devient AM, les droites AM et BM sont symétriques par rapport à D et, inversement, s'il en est ainsi, M' est confondu avec M; on a donc à chercher le

lieu des points M tels que AM et BM soient, en direction, symétriques par rapport à D. Les faisceaux AM et BM étant homographiques, le lieu de M est une conique passant par A et B; ses directions asymptotiques sont l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à D; cette conique est donc une hyperbole équilatère; son centre est le milieu de AB, comme on le voit en achevant le parallélogramme ayant pour côtés consécutifs MA et MB. D'après la première manière de définir M′, on voit que ce lieu est le même que celui des points de contact des tangentes aux cercles passant par A et B et parallèles à D_1.

II. Si le point M décrit une droite Δ, les faisceaux AM et BM sont homographiques; les faisceaux AM′ et BM′, respectivement homographiques aux faisceaux BM et AM, sont aussi homographiques; donc le lieu de M′ est une conique Γ passant par A et B. Cherchons les directions asymptotiques de Γ : quand AM′ et BM′ sont paral-

Fig. 2.



lèles, AM et BM sont parallèles ou confondus et inversement. Or AM et BM sont parallèles quand M est à l'infini sur Δ, alors une première direction asymptotique est la symétrique Δ_1 de Δ par rapport à D; d'autre part,

AM et BM sont confondus quand M est au point de rencontre I de AB et Δ; par suite, la deuxième direction asymptotique est la symétrique D_1 de AB par rapport à D; de plus, quand M vient en I, le point M′ étant à l'infini sur la droite MM′ de direction D_1, le point I est un point de l'asymptote de direction D_1 (¹); on a donc une première asymptote IL parallèle à D_1; l'autre, de direction Δ_1, s'obtient d'après une propriété bien connue d'une corde AB d'une hyperbole, savoir : le segment de droite porté par AB et ayant ses extrémités sur les asymptotes a même milieu que le segment AB. On prendra donc

$$\overline{BI'} = \overline{IA}$$

et, par I′, on mènera une droite I′L′ parallèle à Δ_1.

Comme cas particulier, quand la droite Δ passe par l'un des points A, B, l'hyperbole Γ se décompose en deux droites AA′ parallèle à D_1 et BB′ parallèle à Δ_1; on peut dire qu'elle se réduit à ses deux asymptotes.

Le cercle ABM rencontre la droite Δ en un deuxième point N ayant pour associé N′. Les régions de Δ où doit se trouver M pour que M′ reste sur une même branche

---

(¹) Ceci prouve à nouveau que D_1 est une direction asymptotique mais non que IL est l'asymptote correspondante. Pour prouver que IL est l'asymptote de direction D_1 il faut observer qu'à deux droites Δ et Δ' il correspond deux coniques Γ et Γ' ayant quatre points communs, dont trois, A, B et le point à l'infini sur D_1, sont fixes; de sorte que le quatrième point correspond à l'intersection de Δ et de Δ'. Supposant alors que Δ' soit l'asymptote en question, la conique Γ' se décompose en deux droites, savoir : Δ' et AB. Les points communs à Γ et à Γ' sont A, B et le point à l'infini sur D_1 compté deux fois, puisque Δ' est tangente à Γ en ce point. Il en résulte que le point à l'infini sur D_1 correspond au point de rencontre de Δ et de Δ'; mais le point associé au point à l'infini sur D_1 est indéterminé sur AB; donc Δ et Δ' se coupent sur AB et l'asymptote cherchée est bien ID_1. (X. A.)

de Γ sont les demi-droites $I\Delta$, $I\Delta'$. Il y a deux cas à examiner : le point I est *extérieur* au segment AB ou *appartient* à ce segment.

Quand I est extérieur au segment AB, les points M et N décrivent en même temps les demi-droites $I\Delta$, $I\Delta'$ en vertu de la relation

$$IM.IN = IA.IB;$$

les points M′, N′ restent sur la même branche ; en effet, la corde M′N′ ne rencontre pas l'asymptote IL de direction D_1 et par suite ne rencontre aucune asymptote.

Quand I appartient au segment AB, les points M et N sont l'un sur $I\Delta$, l'autre sur $I\Delta'$; les points M′ et N′ sont sur des branches différentes, car la corde M′N′ de Γ rencontre les deux asymptotes, puisqu'elle rencontre évidemment l'asymptote IL de direction D_1. Dans les deux cas, on voit que les régions cherchées sont $I\Delta$ et $I\Delta'$.

III. Pour que la conique Γ soit une parabole, il faut et il suffit que ses deux directions asymptotiques soient les mêmes, c'est-à-dire Δ_1 parallèle à D_1 et par suite Δ parallèle à AB. La parabole relative à une droite Δ parallèle à AB a son axe parallèle à D_1, sa directrice D′ est perpendiculaire à D_1. Soient F le foyer de cette parabole, AA′ et BB′ les perpendiculaires abaissées de A et B sur la directrice D′. On a

$$AF = AA', \qquad BF = BB'$$

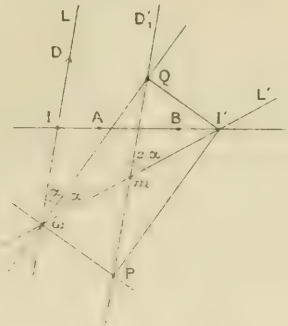
et, par suite,

$$FB - FA = BB' - AA' = \text{const.} = \text{la projection de AB sur } D_1.$$

De là résulte que si Δ se déplace parallèlement à AB, le lieu du foyer F de la parabole Γ est une hyperbole ayant pour foyers A et B et pour longueur d'axe transverse la projection de AB sur D_1.

IV. Si, à deux droites Δ, correspondent deux hyperboles Γ ayant une asymptote commune, celle-ci est nécessairement parallèle à D_1, direction asymptotique commune aux deux hyperboles, car, autrement, les deux hyperboles ayant deux points communs A, B auraient

Fig. 3.



leurs deux asymptotes communes et coïncideraient; les droites Δ correspondantes coïncideraient également. On conclut de là et aussi de ce qui précède (III) que les droites Δ donnant lieu à des hyperboles ayant une asymptote commune doivent rencontrer la droite indéfinie AB en un même point I et que l'asymptote commune est IL parallèle à D_1. Les asymptotes IL et I'L' d'une hyperbole Γ se coupent au centre ω de Γ qui a pour axes de symétrie les bissectrices ωP, ωQ des angles formés par les asymptotes. Le milieu m de $I'\omega$ décrit une droite D'_1 parallèle à IL, équidistante de I' et IL, rencontrant les axes en P et Q. Le quadrilatère $I'P\omega Q$ est un rectangle; en effet, les triangles $\omega m P$, $\omega m Q$ sont isoscèles, par suite

$$mP = mQ = m\omega;$$

les diagonales du quadrilatère se coupent en parties égales; c'est donc un parallélogramme qui est rectangle,

puisque l'angle $P\omega Q$ est droit. L'enveloppe des axes ωP, ωQ est donc une parabole ayant pour foyer I', pour tangente au sommet D'_1, pour directrice IL.

RÉCLAMATION A PROPOS DU THÉORÈME DIT « DE ROUCHÉ »;

PAR M. G. FONTENÉ.

Il est d'usage de donner le nom de *théorème de Rouché* à la discussion d'un système d'équations du premier degré. Bien qu'on ait mauvaise grâce à parler de soi, je crois pouvoir rappeler que j'avais remis au mois de *septembre* 1875 à Gerono l'Article qui a paru au mois de décembre de la même année dans les *Nouvelles Annales*, et qui donnait cette discussion : cela résulte d'une Note de Gerono insérée dans le numéro de janvier suivant, en réponse à une réclamation, d'ailleurs bienveillante, de M. Rouché. Or, la Note de M. Rouché à l'Académie est du mois de *novembre* de la même année. On pourrait donc, comme l'a fait M. H. Laurent dans son *Traité d'Algèbre* (1879), dire sans injustice : *le théorème de MM. Fontené et Rouché*. Je crois que cela ne contrarierait pas M. Rouché, dont le bagage scientifique est d'ailleurs considérable.

QUESTIONS.

573. (**1861**, 112). — Soit la fraction continue

$$\sqrt{n} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{0}{2c + \cfrac{1}{b + \sqrt{n}}}}.$$

Faisons

$$a + \frac{1}{b} = M,$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = N.$$

On a

$$M.N = n.$$

583. (**1861**, 140). — Étant données, dans un plan, deux courbes géométriques, l'une de *degré m* et l'autre de la *classe n*; si une tangente roule sur celle-ci et que par les points où elle rencontre la courbe C_m on mène à cette courbe des tangentes et des normales :

1° Les tangentes se coupent deux à deux sur une courbe de degré $\frac{1}{2} mn(m-1)(2m-3)$;

2° Les normales se coupent deux à deux sur une courbe de degré $\frac{1}{2} mn(m-1)(2m-1)$. (E. DE JONQUIÈRES.)

585. (**1861**, 140). — Trois coniques étant données dans un même plan, il y a vingt points d'où elles sont vues sous le même angle ou sous des angles supplémentaires.

(FAURE.)

589. (**1861**, 141). — Un polygone d'un nombre pair de côtés étant inscrit dans une conique, si l'on mène par son centre des parallèles à chaque côté du polygone, de manière à former un parallélogramme en chacun de ses sommets, la somme des inverses des parallélogrammes de rang pair est égale à la somme des inverses des parallélogrammes de rang impair.

(FAURE.)

592 (**1861**, 216). — Soit un cylindre circonscrit à une surface de *révolution;* de chaque point de la ligne de contact on abaisse des perpendiculaires sur l'axe; on obtient une surface gauche; circonscrivons à cette surface un second cylindre; coupant les deux cylindres par un plan, la section du second cylindre est la développée de la section du premier cylindre.

(MAXIME DUNESME.)

593 (**1861**, 216). — Un cylindre étant circonscrit à une surface de révolution engendrée par une sinusoïde, la courbe de con-

tact est une hélice dont la projection sur un méridien est aussi une sinusoïde semblable à la courbe méridienne; le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$; la section du cylindre par un plan est une cycloïde; opérant comme dans la question précédente, la courbe de contact sur la surface gauche est encore une hélice égale à la première hélice. (MAXIME DUNESME.)

596 (**1861**, 399). — Cette question fait double emploi avec 589.

597 (**1861**, 399). — Si l'on prend les polaires des points milieux des côtés d'un triangle, relativement à une conique *quelconque* inscrite dans le triangle, ces polaires déterminent un triangle qui a une surface constante. (FAURE.)

1839. Soient AA′, BB′ les axes d'une ellipse telle que l'angle BAB′ soit égal à $\frac{k\pi}{n}$, k et n étant premiers entre eux; P_0 un point de AA′ ou de ses prolongements; $P_0M_0P_1M_1\ldots$ une ligne brisée rectangulaire dont les éléments font avec AA′ les angles $\pm\frac{\pi}{n}$, dont les sommets P_0, P_1, ..., sont sur AA′, les sommets M_0, M_1, ..., sont sur l'ellipse et tellement placés que deux sommets successifs M_i, M_{i+1} ne soient pas symétriques par rapport à AA′; P_0 coïncide avec P_n si k est pair; avec P_{2n} si k est impair. (LÉMERAY.)

1840. On décrit un cercle ayant pour diamètre un rayon de courbure d'une conique donnée et l'on mène les tangentes communes à ces deux courbes. Quelle est l'enveloppe de la corde de contact de ces tangentes et du cercle, lorsque l'on prend successivement tous les rayons de courbure de la conique?
(MANNHEIM.)

1841. Dans un quadrilatère complet, les quatre orthocentres et les points où la ligne de ces orthocentres est coupée par les quatre côtés, sont huit points en involution.
(C. BLANC.)

1842. Sur la diagonale extérieure d'un quadrilatère inscrit, les intersections de cette diagonale avec les diagonales intérieures, les intersections des côtés opposés, les points où passent les perpendiculaires menées aux diagonales intérieures

par l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les extrémités de la diagonale extérieure et le croisement des diagonales intérieures, sont six points en involution.

(C. Blanc.)

1843. Appelons *second centre de courbure* d'une courbe en un point M, le centre de courbure de la développée au point où elle est touchée par la normale en M. Le lieu des seconds centres de courbure des courbes triangulaires

$$AX^m + BY^m + CZ^m = 0,$$

tangentes en M à une droite donnée MT, lorsque m varie, est une parabole passant par M et admettant MT pour diamètre.

(A. Pellet.)

1844. Les axes des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible à un cercle sont tangents à une parabole qui touche les trois diagonales du quadrilatère.

(A. Pellet.)

1845. Les plans principaux des quadriques inscrites dans la développable définie par une sphère et une quadrique quelconque sont tangents à une développable circonscrite à des paraboloïdes qui touchent les quatre faces du tétraèdre conjugué par rapport à la sphère et à la quadrique.

(A. Pellet.)

1846. Si O et O_1 sont les foyers d'une conique inscrite à un triangle ABC, on sait que les projections de ces points sur les côtés de ABC appartiennent au cercle homographique.

I. Si le point O décrit une droite Δ, le point O_1 décrit une conique circonscrite à ABC.

II. Construire la conique A, B, C, D, E, et déterminer *graphiquement* sa nature.

III. Le lieu des points O et O_1 pour lesquels la droite OO_1 passe par un point fixe P, auquel en correspond un autre P_1, est une cubique r dont on obtient aisément douze points et sept tangentes. Trouver les asymptotes.

IV. A la cubique r en correspond une autre r_1, relative à P_1, et ayant avec r neufs points communs. (P. Sondat.)

1847. Un fil homogène de longueur l, dont le poids par unité

de longueur est ϖ, est attaché par une de ses extrémités à un point fixe, tandis que l'extrémité libre porte un poids p.

Ce fil est soumis à l'action du vent soufflant horizontalement avec une intensité et dans une direction constantes. On admet que la pression du vent sur chaque élément infiniment petit du fil est proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse et l'on demande de déterminer la forme d'équilibre du fil.

Examiner ce que devient cette forme d'équilibre dans le cas où $p = 0$. (M. D'OCAGNE.)

1848. Si une cubique unicursale tritangente à une conique découpe sur chacune des tangentes aux trois points de contact un segment qui soit vu de l'un des foyers de la conique sous un angle droit, l'un des segments déterminés par cette cubique sur une tangente quelconque à la conique est vu du même foyer sous un angle droit. (M. D'OCAGNE.)

1849. Étant donnés une couronne circulaire de centre O comprise entre les cercles C et C′, et un point A *en dehors* de cette couronne (c'est-à-dire intérieur au plus petit cercle ou extérieur au plus grand), on appelle B et B′ les points des cercles C et C′ situés sur la perpendiculaire à OA élevée en A si ce point est intérieur, sur les tangentes issues de A si ce point est extérieur et du même côté de OA, et l'on pose dans les deux cas :

$$\widehat{AOB} = \omega, \qquad \widehat{AOB'} = \omega'.$$

Si le rayon situé du même côté que B et B′, sur lequel l'épaisseur de la couronne est vue de A sous le plus grand angle θ, fait avec OA l'angle φ, on a

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega'}{2},$$

$$\operatorname{tang}\theta = 2\,\frac{\sin\dfrac{\omega'+\omega}{2}\sin\dfrac{\omega'-\omega}{2}}{\sin\omega\,\sin\omega'}.$$

(M. D'OCAGNE.)

[K11]

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES [1] » POUR 1899;

PAR M. E. DUPORCQ.

1. La projection stéréographique permet, comme on sait, de ramener l'étude des cercles d'un plan à celle des sections planes d'une sphère : les quatre coordonnées homogènes qui définissent l'équation d'un plan peuvent donc être envisagées ainsi comme quatre coordonnées homogènes d'un cercle du plan.

Considérons, par exemple, la sphère Σ qui a pour équation homogène, relativement à trois axes rectangulaires Ox_1, Ox_2, Ox_3,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0;$$

désignons par ω le point de cette sphère qui admet les coordonnées

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad x_3 = ix_4,$$

et soit m un point quelconque du plan $x_1 O x_2$ de coordonnées

$$x_1 = xx_4, \qquad x_2 = yx_4, \qquad x_3 = 0.$$

Les coordonnées homogènes du point μ, où la droite ωm perce la sphère Σ, peuvent s'écrire

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = \frac{1}{2i}(x^2 + y^2 + 1), \quad x_4 = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2).$$

Par suite, après substitution de ces valeurs, *l'équation*

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

[1] *Voir* l'énoncé du sujet, même tome, p. 145.

représente la projection stéréographique A *du cercle suivant lequel la sphère* Σ *coupe le plan polaire* P *du point a de coordonnées* u_1, u_2, u_3, u_4.

Le centre du cercle A est d'ailleurs le point où la droite ωa perce le plan $x_1 O x_2$.

2. Si le point A appartient à la sphère Σ, le plan P la touche en ce point, et le rayon du cercle A devient nul; par suite, *l'ensemble des cercles de rayon nul se trouve représenté par l'équation*

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 0.$$

Si, au contraire, le point a est dans le plan π tangent à Σ en ω, le plan P passe par le centre de projection, et le cercle A se réduit à une droite; ainsi *l'équation*

$$u_3 - i u_4 = 0$$

représente l'ensemble des droites du plan.

3. Nous utiliserons souvent une propriété importante de la projection stéréographique, que nous nous contenterons de rappeler : elle consiste en ce que, P étant le plan polaire d'un point a par rapport à une sphère, les projections stéréographiques des points où cette sphère rencontre une sécante issue de a, sont deux points symétriques par rapport au cercle A suivant lequel se projette la section de la sphère par le plan P; autrement dit, *à deux figures en perspective sur la sphère correspondent deux figures symétriques par rapport à un cercle.*

Soient par exemple P_1 et P_2 deux plans dont les sections par la sphère Σ sont en perspective du point de vue a : les projections de ces sections, A_1 et A_2, seront symétriques par rapport au cercle A.

Or les pôles a_1 et a_2 des plans P_1 et P_2 sont sur une même droite issue de a, et ils sont conjugués harmoniques relativement au point a et au point où cette droite coupe le plan P. Ainsi, *à deux points homologues de l'homologie particulière* (a_1, a_2) *correspondent deux cercles symétriques par rapport au cercle* A.

4. Si le point a de l'espace décrit une surface algébrique d'ordre n, le cercle A qui lui correspond, comme nous l'avons indiqué plus haut (n° 1), engendrera *un réseau du $n^{ième}$ ordre*. Les cercles points forment donc un réseau du second ordre, et les droites un réseau du premier ordre.

Si le point a décrit seulement une courbe d'ordre p, le cercle A engendrera de même une *série du $p^{ième}$ ordre*. On voit donc immédiatement que :

Les cercles communs à deux réseaux, d'ordres m et n, forment une série d'ordre mn.

Enfin, les cercles communs à trois réseaux correspondent aux points communs à trois surfaces, et leur nombre est égal au produit des ordres des réseaux.

5. On sait que, lorsque deux plans sont conjugués à une sphère, ils la coupent suivant des cercles orthogonaux; cette propriété n'étant pas altérée par la projection stéréographique, on voit que si a et a' désignent deux points de l'espace conjugués à Σ, les cercles correspondants A et A' se coupent orthogonalement; l'orthogonalité de deux cercles s'exprime donc par la relation

$$u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + u_3 u'_3 + u_4 u'_4 = 0.$$

On voit de plus que :

Tout réseau linéaire est formé par les cercles orthogonaux à un cercle fixe.

Ce cercle Γ, que nous appellerons la *base* du réseau linéaire, est d'ailleurs évidemment la projection du cercle de la sphère Σ situé dans le plan que décrit alors le point a.

Cette base est le lieu des centres des cercles points du réseau, et les droites qui appartiennent au réseau passent par son centre. Elle peut d'ailleurs se réduire à un point ou à une droite.

Enfin, on voit immédiatement qu'un réseau linéaire est défini par trois cercles qui n'admettent pas un même axe radical.

6. Les cercles communs à deux réseaux linéaires forment une *série linéaire*. Le point a décrit alors une droite Δ et son plan polaire P pivote autour de la conjuguée de Δ par rapport à Σ; les cercles A ont donc un même axe radical; ils coupent orthogonalement tous les cercles suivant lesquels se projettent les sections de Σ par les plans issus de Δ. Nous aurons parfois à considérer ces deux séries linéaires réciproques, qui correspondent ainsi à deux droites conjuguées à Σ : nous dirons qu'elles sont *orthogonales*.

Si la droite Δ passe par ω_1, les cercles correspondants deviennent concentriques, et la série orthogonale est formée par les droites issues de leur centre commun.

7. Le nombre des cercles communs à une série linéaire et à un réseau quelconque est (n° 4) égal à l'ordre de ce réseau; autrement dit :

Par deux points arbitraires, il passe m cercles d'un réseau d'ordre m.

De même, *un réseau d'ordre m admet généralement m cercles de centre donné.* Ils correspondent aux points où la surface S, à laquelle correspond le réseau, coupe une droite issue de ω. Il y a exception si S passe par ω : la droite de l'infini, envisagée comme une droite double, appartient alors au réseau, et son centre est indéterminé, de sorte qu'il ne reste plus en réalité que $(m - 1)$ cercles ayant un centre donné : nous dirons alors que le réseau est *parabolique* [1].

8. Avant de passer à l'étude spéciale des réseaux quadratiques, nous allons indiquer quelques propriétés communes à tous les réseaux, d'ordre quelconque, et d'où découleront immédiatement d'importantes propriétés des réseaux quadratiques.

A tout réseau se trouvent attachées deux courbes remarquables : la première est le lieu des centres des cercles points du réseau; nous l'appellerons sa *base;* la seconde, que nous nommerons sa *directrice*, est l'enveloppe des droites du réseau.

Soit S la surface à laquelle correspond un réseau d'ordre m; la base de ce réseau est évidemment la projection stéréographique de la section de S par Σ; les génératrices de Σ qui se croisent en ω rencontrent chacune S en m points dont les projections sont confondues en un point cyclique; donc :

La base d'un réseau d'ordre m est en général une courbe d'ordre 2m, qui admet les points cycliques comme points multiples d'ordre m.

---

[1] Un autre cas d'exception est celui où S est un cône de sommet ω; le réseau est alors constitué par les cercles ayant leurs centres sur une courbe d'ordre m.

Quant à la directrice, elle correspond à la section de S par le plan Π, qui touche Σ en ω; elle est donc la trace d'un cône de $m^{\text{ième}}$ classe. Ainsi :

La directrice d'un réseau est généralement d'une classe égale à l'ordre de ce réseau.

Le premier de ces théorèmes est en défaut dans le cas d'un réseau *parabolique* (n° 7) : l'ordre de la base est diminué d'une unité, ainsi que l'ordre de multiplicité des points cycliques. Quant à la directrice, elle touche alors la droite de l'infini.

9. La base et la directrice d'un même réseau ont entre elles une relation remarquable. Pour la mettre en évidence, désignons par a un des points où S coupe une des génératrices de Σ issues de ω; la tangente en ce point à l'intersection de S et Σ est évidemment dans le plan tangent à Σ en ce point; or ce plan passe par la génératrice ωa, et il est, d'autre part, le plan polaire de a par rapport à Σ.

Sa trace sur le plan du réseau est donc une droite isotrope tangente à la base en un point cyclique, et qui touche en même temps la directrice. On en déduit que :

Les foyers de la directrice coïncident avec les foyers singuliers de la base.

10. Nous allons montrer maintenant comment à tout réseau s'en trouve rattaché un autre dont les propriétés sont intimement liées à celles du premier.

Soit en effet A un cercle quelconque d'un réseau correspondant à un point a d'une surface S; considérons le plan P' tangent en a à S, et soit A' la projection de sa

section par Σ. A tout cercle A du réseau on peut associer ainsi un cercle A'. On voit que *les cercles* A *et* A' *sont orthogonaux* et l'on peut montrer aisément que *le centre de* A' *est l'enveloppe des axes radicaux du cercle* A *avec tous les cercles infiniment voisins du réseau.*

Soit a' le point de l'espace qui correspond à A' : c'est le pôle, relativement à Σ, du plan P' tangent en a à S'. Le réseau [A'] correspond donc à la surface S', polaire réciproque de S par rapport à Σ.

Les réseaux [A] et [A'] *sont réciproques.*

Nous dirons que l'un est le réciproque de l'autre.

11. Toute génératrice de Σ se correspond évidemment à elle-même par polaires réciproques relativement à cette sphère; il en résulte que les génératrices de Σ qui touchent la surface S touchent aussi sa polaire réciproque S'; autrement dit, les courbes suivant lesquelles Σ coupe les surfaces S et S' sont tangentes aux mêmes génératrices de Σ; leurs projections stéréographiques ont donc les mêmes tangentes isotropes, et l'on voit, par suite, que :

Les bases de deux réseaux réciproques sont homofocales.

12. Il est bien évident que la directrice du réseau [A] n'est autre que le contour apparent de la surface S'; comme, d'ailleurs, le lieu des centres des cercles d'une série quelconque du réseau [A'] est la projection d'une courbe tracée sur S', on voit donc que :

Lorsqu'une série de cercles appartient à un réseau, le lieu des centres de ces cercles et la directrice du ré-

seau réciproque du réseau considéré se touchent en leurs points communs.

En particulier :

La base d'un réseau et la directrice du réseau réciproque se touchent en leurs points communs.

On peut également se rendre compte aisément de la propriété suivante :

Les directrices de deux réseaux réciproques ont leurs asymptotes deux à deux rectangulaires.

13. Si la surface S contient une droite, la surface S' passe par la droite conjuguée; on en déduit que :

Si une série linéaire fait partie d'un réseau, la série orthogonale appartient au réseau réciproque.

En particulier :

Si un réseau est engendré par une série linéaire, la série orthogonale engendre le réseau réciproque.

Dans ce cas, la directrice de chaque réseau est l'enveloppe de l'axe radical de la série linéaire qui l'engendre, et les points communs aux cercles de cette série ont pour lieu la base du réseau réciproque.

14. La correspondance de deux réseaux réciproques est facile à interpréter analytiquement. Si un réseau [A] a pour équation

$$\varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0,$$

au cercle A de ce réseau, de coordonnées u_1, u_2, u_3, u_4, correspond le cercle A' du réseau réciproque, de coor-

données réciproques

$$\varphi'_{u_1},\quad \varphi'_{u_2},\quad \varphi'_{u_3},\quad \varphi'_{u_4}.$$

Cette correspondance réciproque peut ne pas être univoque; cette circonstance se produit si le réseau [A] correspond à une surface développable : à chaque série linéaire de ce réseau correspond alors un seul cercle A′, et l'ensemble des cercles A′ se réduit à une série. Enfin, si [A] est un réseau linéaire, tous les cercles A′ coïncident avec la base de ce réseau.

15. Abordons maintenant l'étude spéciale des réseaux quadratiques, c'est-à-dire tels (n° 7) que par deux points arbitraires, il passe deux cercles de chacun de ces réseaux. La surface S est alors une quadrique qui coupe Σ suivant une biquadratique sphérique; la projection de cette intersection est une quartique bicirculaire, c'est-à-dire une *cyclique*. Ainsi :

La base d'un réseau quadratique est en général une cyclique.

Une cyclique est, comme on sait, symétrique par rapport à quatre cercles deux à deux orthogonaux, car elle est la projection stéréographique d'une courbe sphérique située sur quatre cônes, dont les sommets u_1, u_2, u_3 et u_4 déterminent le tétraèdre conjugué à la fois à la sphère Σ et à la quadrique S. Les quatre cercles directeurs de la cyclique sont les projections des sections de Σ par les quatre faces de ce tétraèdre. Or, la quadrique S se correspond évidemment à elle-même dans la transformation homologique qui associe à tout point a de l'espace le point a' de la droite $u_1 a$ tel que le segment aa' soit divisé harmoniquement par le point u_1 et par le

plan $u_2 u_3 u_1$. Il en résulte donc, en tenant compte du résultat obtenu plus haut (n° 3) que :

Un réseau quadratique est en général symétrique par rapport aux quatre cercles directeurs de sa base.

16. Les résultats généraux obtenus précédemment fournissent les propriétés suivantes dans le cas des réseaux quadratiques :

La directrice d'un réseau quadratique est en général une conique, homofocale aux déférentes de la base du réseau.

Si la quadrique S passe par le centre de projection ω, le réseau quadratique est parabolique.

On voit que :

La base d'un réseau quadratique parabolique est une cubique circulaire ; la directrice est alors une parabole homofocale et coaxiale aux quatre paraboles déférentes de cette cubique.

17. Un réseau quadratique est défini par sa base et sa directrice. Il est par exemple facile d'obtenir la conique qui constitue le lieu des centres des cercles du réseau orthogonaux à un cercle fixe Γ ; en effet, les tangentes à la directrice, issues du centre de Γ, et les quatre points où Γ coupe la base, peuvent être considérés comme six cercles de la série considérée : la conique cherchée passe donc par les points communs à Γ et à la base, et ses asymptotes sont perpendiculaires aux tangentes à la directrice issues du centre de Γ. La compatibilité de ces six conditions constitue un théorème sur les cycliques : on peut l'énoncer ainsi :

Les cordes communes à une cyclique et à un cercle

sont deux à deux également inclinées sur les droites qui joignent le centre du cercle aux foyers principaux de la cyclique.

18. La polaire réciproque S′ de S par rapport à Σ étant aussi une quadrique, on voit que :

Le réseau réciproque d'un réseau quadratique est aussi quadratique.

Tout cercle du réseau [A′], réciproque du réseau [A], est, comme dans le cas général, la projection stéréographique d'un cercle de Σ situé dans un plan tangent à S. Il en résulte que le lieu des centres des cercles de [A] orthogonaux à un cercle quelconque de [A′] se compose de deux droites, et que ces cercles forment deux séries linéaires.

La directrice du réseau [A′] n'est autre que le contour apparent de la surface S; elle touche en quatre points la base du réseau [A], et ces points sont les projections de quatre points de la sphère situés dans le plan polaire Q de ω relativement à S; les points de contact en question sont donc sur un cercle, dont le centre est la projection du pôle K du plan Q par rapport à Σ. Or la droite ωK est la conjuguée par rapport à Σ de l'intersection du plan Q et du plan Π, tangent à Σ en ω, ou encore de la polaire du point ω par rapport à la section σ de S par le plan Π; la droite ωK est donc la polaire du plan Π par rapport au cône du second degré qui est le polaire réciproque de la conique σ par rapport à la sphère Σ, cône dont la trace sur le plan des réseaux est justement la directrice du réseau (A). On voit donc que :

La directrice d'un réseau quadratique touche la base

du réseau réciproque en quatre points équidistants du centre de la directrice de ce dernier.

19. Du théorème général du n° 11, il résulte que :

Les bases de deux réseaux quadratiques réciproques sont deux cycliques homofocales.

Ces deux bases se coupent donc orthogonalement en huit points : il est facile de se rendre compte que ces points sont les projections des points de contact de la sphère Σ avec les huit génératrices de S qui touchent cette sphère, et ces génératrices ont justement pour projections les tangentes en ces points à la base du réseau [A]. Or ces projections doivent évidemment toucher le contour apparent de S, c'est-à-dire la directrice du réseau [A']. On voit donc que :

Les tangentes à la base d'un réseau quadratique aux points où elle coupe la base du réseau réciproque touchent la directrice de ce dernier.

On peut choisir arbitrairement les deux cycliques homofocales qui sont les bases de deux réseaux quadratiques réciproques ; les réseaux sont alors déterminés, et l'on a huit tangentes de chacune de leurs directrices ; il en résulte la propriété suivante des cycliques homofocales :

Les huit tangentes à une cyclique aux points où elle coupe une cyclique homofocale, sont tangentes à une même conique, qui touche la première cyclique en quatre points, et a pour foyers les foyers singuliers de la seconde cyclique.

20. Si la quadrique S passe par le centre de projec-

tion ω, le réseau [A] devient parabolique; le contour apparent de S se réduit alors à deux points, α et β, qui sont les traces des génératrices de cette quadrique issues de ω. On en déduit que :

Si un réseau quadratique est réciproque d'un réseau parabolique, sa direction se réduit à deux des foyers singuliers de sa base, et réciproquement.

D'autre part, toute courbe de S se projette suivant une courbe passant par α et β; la base de [A], qui est une cubique circulaire, jouit donc de cette propriété, et, comme la base du réseau conjugué est une cyclique quelconque, homofocale à cette cubique, on voit que :

Lorsqu'une cubique circulaire est homofocale à une cyclique, elle passe par deux des foyers singuliers de celle-ci.

Or, à tout faisceau de cycliques homofocales, appartiennent, comme on sait, deux cubiques circulaires. Par suite :

Le lieu des foyers singuliers des cycliques d'un système homofocal, se compose des deux cubiques du système.

D'ailleurs, les foyers singuliers coïncidant avec les foyers des déférentes, et chacune de celles-ci passant par quatre foyers appartenant à un même cercle directeur, on voit que :

Le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points d'un cercle, se compose des deux cubiques circulaires qui admettent ces points pour foyers.

Les axes de ces coniques ont, comme on sait, des directions fixes ; chaque cubique correspond à l'une de ces directions, qui est d'ailleurs celle de son asymptote réelle. En associant à ces résultats ceux du paragraphe précédent, on voit donc que :

Étant donnée une cubique circulaire et une corde ab parallèle à son asymptote réelle, si l'on mène les tangentes à la cubique par les points a et b, leurs points de contact sont les huit points où la cubique coupe la cyclique homofocale, ayant a et b pour foyers singuliers. Les normales à la cubique en ces huit points touchent une parabole homofocale et coaxiale aux déférentes de cette cubique.

21. Examinons encore le cas où la quadrique S touche en ω la sphère Σ; l'intersection de ces surfaces présente alors en ω un point double, et la base du réseau [A] se réduit alors à une conique. Nous dirons alors que ce réseau est *biparabolique*. Dans ce cas, en dehors du cône de sommet ω qui passe par la biquadratique commune à S et à Σ, il n'existe que deux cônes du second degré contenant cette courbe, et leurs sommets sont dans le plan tangent en ω aux deux quadriques ; ils sont d'ailleurs, comme on le voit aisément, sur les bissectrices de l'angle formé par les tangentes au point double ω; il en résulte que :

Tout réseau biparabolique est symétrique par rapport aux axes de sa conique base.

La surface S', polaire réciproque de S par rapport à Σ, touche aussi Σ en ω; par suite :

Le réseau réciproque d'un réseau biparabolique l'est aussi.

En vertu des théorèmes généraux démontrés précédemment :

Les bases de deux réseaux réciproques biparaboliques sont deux coniques homofocales.

La directrice de chaque réseau est formée par les points à l'infini des normales menées à la base de ce réseau, aux points où elle coupe la base du réseau réciproque.

22. La base d'un réseau quadratique peut se décomposer en deux cercles : ce cas se produit lorsque S et Σ sont bitangentes; S′ et Σ le sont alors aux mêmes points. On voit donc que :

Lorsque la base d'un réseau quadratique se décompose en deux cercles, il en est de même de celle du réseau réciproque.

On voit de plus que :

La directrice de chaque réseau est alors une conique ayant pour foyers les centres des deux cercles qui constituent sa base, et bitangente aux cercles bases du réseau réciproque. Les quatre cercles considérés ont d'ailleurs même axe radical.

Les quadriques S et Σ ont alors une infinité de pôles doubles, situés sur la droite joignant leurs points de contact. Par suite :

Les réseaux quadratiques envisagés sont symétriques par rapport à tous les cercles orthogonaux à leurs cercles bases.

On peut toujours, par une inversion convenable, amener les cercles bases à être concentriques; on a alors

des réseaux *de révolution. Les cercles du réseau ayant leurs centres sur un diamètre des cercles bases forment alors une des séries de cercles bitangents à une cyclique à centre*, qui admet pour foyers les points où ce diamètre coupe les cercles bases.

23. L'un des deux cercles en lesquels se décompose la base d'un réseau peut être un cercle point ou la droite de l'infini. Le premier cas se ramène d'ailleurs au second par une inversion ayant pour origine le cercle point en question. On obtient alors encore un réseau de révolution, dont cette fois *la série méridienne est formée d'un des deux systèmes de cercles bitangents à une conique,* comme on peut aisément s'en rendre compte.

Enfin la base peut se réduire à deux cercles points. Dans ce cas, par une inversion ayant pour centre l'un de ces points, on transforme le réseau en *un réseau de révolution, formé par les cercles vus d'un point fixe sous un angle donné.*

Le réseau est alors déterminé par ses deux points de base et par un cercle quelconque, et l'on peut en déduire tous les cercles en remarquant que *le réseau est alors symétrique par rapport à tous les cercles qui passent par les points de base et aussi par rapport aux cercles orthogonaux à ces derniers.*

Les cercles d'un réseau de cette nature sont circonscrits à des triangles circonscrits à la conique directrice. Réciproquement, les cercles circonscrits aux triangles circonscrits à une même conique forment un réseau quadratique jouissant des propriétés précédentes; cette remarque facilite beaucoup l'étude des problèmes relatifs à ces cercles.

24. Lorsque S et Σ sont circonscrites l'une à l'autre, *la base se réduit à un cercle double.*

Le réseau est alors symétrique par rapport à tous les cercles orthogonaux à sa base, et l'on en déduit que *les cercles du réseau coupent la base sous un même angle*. Cet angle peut être nul : *les cercles tangents à un cercle donné forment donc un réseau quadratique*, S est alors un cône circonscrit à Σ.

Un cas particulièrement intéressant est celui où *la base se réduit à la droite de l'infini; symétrique par rapport à une droite quelconque, le réseau est alors formé par les cercles égaux à un cercle donné.*

25. Les surfaces du second degré étant réglées, il en résulte des propriétés des réseaux quadratiques (n° 13); ils peuvent être engendrés de deux manières par une série linéaire variable.

De ce que deux génératrices de systèmes différents d'une même quadrique se rencontrent, il résulte que :

Si l'on considère deux séries linéaires de systèmes différents d'un même réseau quadratique, ces séries ont un cercle commun.

Si l'on se donne une tangente à la directrice d'un réseau quadratique et la base du réseau réciproque, la quadrique à laquelle correspond ce réseau se trouve définie par la donnée d'une biquadratique gauche et d'un plan tangent, et elle a donc trois déterminations. Il est facile d'obtenir les trois réseaux correspondants. En effet, la droite et la cyclique données se coupent en quatre points qu'on peut diviser en couples de trois manières.

A chacun de ces groupements correspond un des réseaux; tous les cercles qui passent par les deux points formant l'un ou l'autre des couples considérés, appartiennent au réseau; chacun d'eux coupe la cyclique en

deux nouveaux points, et tous les cercles qui passent par ces deux points appartiennent également au réseau; la droite déterminée par ces deux points est d'ailleurs tangente à la directrice du réseau obtenu.

Ainsi :

Étant donnés deux points fixes a et b sur une cyclique, l'enveloppe des cordes cd de cette courbe telles que les quatre points a, b, c, d soient sur un même cercle, est une conique quadruplement tangente à la cyclique.

On pourra encore déterminer un réseau quadratique en se donnant trois séries linéaires de ce réseau; soient aa', bb' et cc' les cordes communes aux cercles de ces séries.

Soient m et m' les points communs aux cercles d'une série de système différent des séries données; ces points forment avec aa', bb' et cc' trois quadrangles inscriptibles à des cercles, et sont d'ailleurs aussi sur la cyclique base du réseau réciproque du réseau cherché. On en déduit que :

Étant donnés trois couples de points, aa', bb' et cc'; le lieu des points m, tels que les cercles maa', mbb' et mcc' aient un second point commun, m', se compose d'une cyclique, qui est aussi le lieu de m', et la droite mm' enveloppe une conique.

26. Des propriétés précédentes et de celles du n° 20 résulte que tout réseau réciproque d'un réseau parabolique est formé par les cercles tels que l'une de leurs cordes communes avec une cubique circulaire donnée passe par un point fixe de cette courbe. Il en est alors de même de l'autre corde commune.

Enfin, un réseau biparabolique est formé par les cercles tels que l'une de leurs cordes communes avec une conique fixe ait une direction donnée.

27. On pourrait multiplier les exemples d'application de ce procédé de transformation des propriétés des quadriques. Ainsi, au théorème d'après lequel toutes les quadriques qui passent par sept points passent par un huitième, se trouve associée la propriété suivante :

Tous les réseaux quadratiques qui comprennent sept cercles en comprennent un huitième.

La construction des huit cercles communs à trois réseaux quadratiques revient à celle des huit points communs à trois quadriques. Ce problème se ramène au second degré si les trois quadriques sont circonscrites à Σ; on pourra donc, avec la règle et le compas, construire les huit cercles qui coupent respectivement sous des angles donnés trois cercles donnés, C_1, C_2 et C_3. Développons ce point.

Considérons d'abord les cercles qui coupent sous des angles donnés deux cercles donnés C_1 et C_2; ils correspondent aux points communs à deux quadriques circonscrites à Σ; celles-ci se coupent suivant deux coniques. Les cercles envisagés forment donc deux séries, les cercles de chaque série étant orthogonaux à un cercle fixe. Quatre diamètres de ces deux cercles fixes sont faciles à obtenir : ce sont les droites qui coupent respectivement les deux cercles donnés sous les angles donnés; or les droites qui coupent un cercle sous un angle donné enveloppent un cercle concentrique; les centres ω_3 et ω'_3 des deux cercles cherchés sont donc les centres d'homothétie de deux cercles Γ_1 et Γ_2 concentriques à C_1 et à C_2. Ces cercles (ω_3) et (ω'_3) ont d'ailleurs même axe radical que

C_1 et C_2. On déterminerait de même les cercles (ω_1), (ω'_1), (ω_2) et (ω'_2). Ces six cercles sont les projections stéréographiques des sections de Σ par les plans des courbes communes à deux des quadriques Q_1, Q_2 et Q_3.

Or ces six plans passent, comme on sait, par le point a, commun aux plans des courbes de contact de Σ avec ces trois surfaces, et ils se coupent trois à trois suivant quatre droites issues de a : chacune de ces quatre droites passe par deux des points communs aux trois quadriques; il en résulte que les cercles cherchés se couperont deux à deux sur le cercle qui correspond au point a, c'est-à-dire sur le cercle A orthogonal aux cercles donnés C_1, C_2 et C_3.

D'autre part, les cercles cherchés doivent couper orthogonalement un cercle de chacun des couples (ω_1) et (ω'_1), (ω_2) et (ω'_2), (ω_3) et (ω'_3), qui peuvent, en effet, d'après ce qui précède, être groupés trois à trois de quatre manières, de manière à avoir même axe radical; chaque groupement correspond à chacun des axes d'homothétie des trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3. Les points où chacun de ces axes coupe le cercle A sont donc les points communs aux cercles de chacun des quatre couples formés par les cercles cherchés; la détermination des cercles de chaque couple est alors ramenée à celle des deux cercles qui passent par deux points donnés et coupent un cercle donné sous un angle donné, problème qui se résout sans difficulté.

28. On obtient comme cas particulier une construction des huit cercles tangents à trois cercles donnés : comme on voit, ces huit cercles forment quatre couples de cercles qui se coupent sur le cercle orthogonal aux cercles donnés et admettent pour axes radicaux les axes d'homothétie de ceux-ci. Cette construction n'est pas

nouvelle; elle est due à Poncelet. Facile à établir directement, elle semble être plus simple, et elle est certainement plus suggestive que celle de Gergonne; elle est néanmoins beaucoup moins connue.

29. Des constructions analogues s'étendraient à l'espace.

D'ailleurs les coordonnées que nous venons d'étudier dans le plan pour les cercles sont analogues aux coordonnées pentasphériques dans l'espace. Celles-ci peuvent s'interpréter aisément dans un espace à quatre dimensions, et tous les théorèmes que nous avons obtenus sur les cycliques sont susceptibles d'être étendus aux surfaces cyclides.

[B1a]

NOTE SUR LES PERMUTANTS;

PAR M. H. BILENKI.

Considérons un Tableau rectangulaire de q lignes et de p colonnes et représentons, suivant l'usage, par la notation a_α^β l'élément écrit dans la ligne de rang α et dans la colonne de rang β

$$\begin{array}{ccccc} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{p-1} & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^{p-1} & a_2^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q-1}^1 & a_{q-1}^2 & \dots & a_{q-1}^{p-1} & a_{q-1}^p \\ a_q^1 & a_q^2 & \dots & a_q^{p-1} & a_q^p \end{array}$$

Développons ce Tableau conformément aux règles suivantes :

1° Chaque terme $a_{\alpha_1}^{\beta_1}, a_{\alpha_2}^{\beta_2}, \dots, a_{\alpha_{p-q+1}}^{\beta_{p-q+1}}$ du développe-

ment contient $p+q-1$ éléments du Tableau, chaque élément n'entrant, bien entendu, qu'une fois dans chaque terme.

2° La somme $\beta_1+\beta_1+\ldots+\beta_{p+q-1}$ des indices supérieurs peut prendre les $p+q-1$ valeurs suivantes

$$q-1+\frac{p(p+1)}{2},$$

$$q-1+\frac{p(p+1)}{2}+1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$q-1+\frac{p(p+1)}{2}+p-q-2.$$

3° La somme $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{p+q-1}$ des indices inférieurs prend alors les $p+q-1$ valeurs correspondantes

$$p-1+\frac{q(q+1)}{2},$$

$$p-1+\frac{q(q+1)}{2}+1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p-1+\frac{q(q+1)}{2}+p+q-2:$$

de sorte que l'excès de la première somme sur la seconde est constant et égal à

$$\frac{p(p-1)}{2}-\frac{q(q-1)}{2}.$$

Il est facile de s'assurer que ce développement, auquel je donnerai le nom de *permutant*, contient un nombre de termes égal à

$$\frac{p(p+1)\ldots(p+q-2)}{(q-1)!}.$$

Cela posé, considérons le permutant

$$\begin{vmatrix} \frac{N+qr}{1} & \frac{1}{N+(q-1)r} & \cdots & \frac{1}{N+r} & \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N-1+qr} & \frac{1}{N-1+(q-1)r} & \cdots & \frac{1}{N-1+r} & \frac{1}{N-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \frac{1}{p+1+qr} & \frac{1}{p+1+(q-1)r} & \cdots & \frac{1}{p+1+r} & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{p+qr} & \frac{1}{p+(q-1)r} & \cdots & \frac{1}{p+r} & \frac{1}{p} \end{vmatrix}$$

dans lequel p et r sont quelconques, mais où q est un entier positif; la différence $N-p$ est, en outre, entière et positive : c'est une fonction de r que je représenterai par le symbole $\overset{N}{\underset{p}{\Phi}}_q(r)$.

J'ai trouvé la formule suivante

$$\begin{aligned} (-1)^{N-p}\frac{1}{(N-p)!}\frac{1}{N+qr}\frac{1}{N+(q-1)r}\cdots\frac{1}{N+r}\frac{1}{N} \\ = \overset{N}{\underset{p}{\Phi}}_q(r) - \frac{1}{1}\overset{N-1}{\underset{p}{\Phi}}_q(r) + \frac{1}{2!}\overset{N-2}{\underset{p}{\Phi}}_q(r) + \ldots \\ + (-1)^{N-p}\frac{1}{(N-p)!}\overset{p}{\underset{p}{\Phi}}_q(r). \end{aligned}$$

On peut en déduire une foule d'autres en faisant certaines hypothèses sur les nombres p, q, r.

Dans le cas très particulier où le permutant considéré n'a que deux lignes, c'est-à-dire quand $N = p+1$, on obtient l'identité suivante, aisée, d'ailleurs, à démontrer directement :

$$\begin{aligned} \frac{p+1+qr}{p+qr}\frac{p+1+(q-1)r}{p+(q-1)r}\cdots\frac{p+1+r}{p+r}\frac{p+1}{p} \\ = \frac{1}{p+qr} + \frac{p+1+qr}{p+qr}\frac{1}{p+(q-1)r} \\ + \frac{p+1+qr}{p+qr}\frac{p+1+(q-1)r}{p+(q-1)r}\frac{1}{p+(q-2)r} + \ldots \\ + \frac{p+1+qr}{p+qr}\frac{p+1+(q-1)r}{p+(q-1)r}\cdots\frac{p+1+r}{p+r}\frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Si $r = 0$, on a la formule suivante que j'ai déjà donnée (*Intermédiaire des Mathématiciens*, juin 1899, p. 127) :

$$(-1)^{N-p}\frac{N(N-1)(N-2)\ldots(p+1)p}{(N-p)!\,N^{n+1}}$$
$$=\sum_p^N n-\frac{N}{1}\sum_p^{N-1} n-\frac{N(N-1)}{2!}\sum_p^{N-2} n-\ldots$$
$$-(-1)^{N-p}\frac{N(N-1)\ldots(p+1)}{(N-p)!}\sum_p^p n,$$

et dans laquelle le symbole $\sum_p^N n$ représente une fonction homogène complète, du degré n, dont tous les coefficients sont égaux à l'unité, de la suite des nombres

$$\frac{1}{p},\quad \frac{1}{p+1},\quad \ldots,\quad \frac{1}{N},$$

formule qui est elle-même assez générale et qui contient, entre autres, celle des progressions géométriques.

Enfin, si $r = 1$, on obtient plusieurs formules d'analyse combinatoire.

La fonction $\overset{N}{\underset{p}{\Phi}}_q(r)$ jouit encore de nombreuses propriétés; j'ignore si on les a étudiées.

[D2aα]

SUR LA RÈGLE DE RÄABE OU RÈGLE DE DUHAMEL;

PAR M. G. DE LONGCHAMPS.

On peut donner de cette règle un énoncé qui nous paraît faciliter son application et, en même temps, la démonstration qui l'accompagne.

Voici l'énoncé que nous proposons :

Considérons la série (V),

$$(V) = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

et posons

$$(1) \qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \beta};$$

1° *Si l'on a* $\beta < 0$, *ou* $\beta = 0$, *la série* (V) *est divergente;*

2° *Si* $n\beta$ *a une limite* k, *pour* $n = \infty$, *la série est convergente.*

Cette conclusion subsiste si $n\beta$ *croît sans limite; mais il y a doute, si* $k = 0$.

1° Si l'on suppose $\beta = 0$, quel que soit n, alors

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{2}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{n-1}{n};$$

par suite,

$$v_n = v_1 \frac{1}{n}.$$

La série (V), à un facteur constant près v_1, commun à tous ses termes, représente la série harmonique. La série est donc divergente.

Si l'on suppose $\beta < 0$, alors, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{n}{n+1},$$

ou

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

La série harmonique étant divergente, un théorème connu indique que (V) est aussi une série divergente.

2° Supposons, maintenant, $\beta > 0$. L'égalité (1) donne

$$(2) \qquad nv_n - (n+1)v_{n+1} = n\beta v_{n+1}.$$

Supposons que $n\beta$ ait une limite k, différente de zéro, pour $n = \infty$, ou que $n\beta$ croisse indéfiniment avec n. Alors, on peut trouver un nombre k', différent de zéro, tel que l'on ait constamment, quel que soit n,

$$n\beta > k'.$$

L'égalité (2) donne

$$nv_n - (n+1)v_{n+1} > k'v_{n+1};$$

et, successivement,

$$\begin{aligned} v_1 - 2v_2 &> k'v_2, \\ 2v_2 - 3v_3 &> k'v_3, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ nv_n - (n+1)v_{n+1} &> k'v_{n+1}, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(1+k')v_1 - (n+1)v_{n+1} > k'(v_1 + v_2 + \dots + v_{n+1}),$$

ou

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n < \frac{(1+k')v_1 - (n+k')v_{n+1}}{k'}.$$

Cette inégalité prouve que la somme S_n des n premiers termes de la série (V), quantité croissante, inférieure à un nombre fixe $\frac{(1+k')v_1}{k'}$, a une limite; la série est donc convergente.

[O2q]

SUR LES ADJOINTES INFINITÉSIMALES D'UNE COURBE PLANE;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Étant donnée une courbe plane (M) quelconque, on peut, d'une infinité de manières, lier à la fois à chacun de ses points M et à la tangente MT en ce point, un point M' tel que *les éléments infinitésimaux d'ordre $n-1$ de la courbe* (M) *dépendent de ceux d'ordre n de la courbe* (M') et, plus particulièrement, que les centres de courbure de la courbe (M) dépendent des tangentes de la courbe (M'). Nous appelons, pour cette raison, la courbe (M') une *adjointe infinitésimale* de la courbe (M).

Si l'on parvient à mettre le mode de liaison entre les centres de courbure de (M) et les tangentes de (M') sous une forme simple, il suffit de chercher les courbes (M) pour lesquelles (M') se réduit à une droite ou à un cercle pour obtenir une classe de courbes dont les centres de courbure se construisent aisément.

Cette idée se trouve appliquée dans un Mémoire que nous avons publié naguère dans l'*American Journal of Mathematics* [1] (t. XI, p. 55, 1888; t. XIV, p. 227, 1892), où les adjointes infinitésimales considérées sont définies comme le lieu du point de rencontre M' du

[1] Voir aussi notre *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale* (n° 361 à 370). Les courbes envisagées précédemment par M. H. Brocard dans les *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège* (2e série, t. I, 1869), rentrent dans la catégorie de nos *adjointes des directrices tangentielles*, lorsque le premier des pôles servant à les définir est rejeté à l'infini.

rayon vecteur OM de la courbe (M) et de la parallèle à la normale (*adjointe des directions normales*), ou à la tangente (*adjointe des directions tangentielles*), issue d'un second pôle P.

On peut rattacher au même point de vue l'étude publiée récemment, dans le présent Recueil, par M. Collignon [1], l'adjointe infinitésimale étant alors celle qu'engendre l'extrémité M′ du segment MM′ de la normale, qui est vu sous un angle constant du point T où la tangente en M rencontre une droite fixe quelconque Ox, et cette adjointe se réduisant à une droite.

Or, dans ce cas, il est bien facile d'obtenir le centre de courbure m répondant au point M, c'est-à-dire le point où MM′ touche son enveloppe. La considération des centres instantanés I et J répondant aux angles de grandeur constante MTM′ et MM′T donne, en effet, immédiatement la construction suivante :

Du point de rencontre I *de* MM′ *et de la perpendiculaire élevée en* T *à* Ox, *abaisser sur* M′T *une perpendiculaire qui coupe en* J *la normale au lieu décrit par* M′ : *le centre de courbure* m *est la projection de* J *sur* MM′.

On trouvera d'autres exemples d'adjointes infinitésimales dans diverses Notes que nous avons publiées dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. I, p. 40, 1883; t. VII, p. 438, 1888) et dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (5e série, t. II, p. 25, 49, 73, 97, 121; 1888; t. IV, p. 31, 49; 1890. 6e série, t. IV, p. 3, 25; 1895). Les exemples traités géométriquement dans la première des Notes de ce dernier groupe sont dus à

---

(1) Même tome, p. 11.

M. Laisant qui les avait traités analytiquement en vue de ramener la construction du centre de courbure des courbes *graphiques* à celle d'une tangente (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIII, p. 367; 1874).

Lorsqu'on pose

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

les formules déterminant les coordonnées x' et y' du point M′ en fonction de celles x et y du point M peuvent s'écrire

$$x' = f(x, y, p), \qquad y' = \varphi(x, y, p),$$

et l'on a, en posant encore $\frac{dy'}{dx'} = p'$,

$$(1) \qquad p' = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}p + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx}}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}p + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}}.$$

Comme, d'autre part, la dérivée $\frac{dp}{dx}$ est liée au rayon de courbure ρ de la courbe (M) par l'équation

$$\frac{dp}{dx} = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho},$$

on voit que l'équation (1) établit un lien entre le coefficient angulaire p' de la tangente de la courbe (M′) et le rayon de courbure ρ de la courbe (M).

« La méthode, dit M. Laisant en parlant de ces formules (*loc. cit.*, p. 370), peut exceptionnellement se trouver en défaut si, par suite de réductions de calcul, l'expression $\frac{dp}{dx}$ se trouve éliminée de l'équation (1).... Mais il n'y a que certains procédés particuliers de construction qui puissent conduire à un semblable résultat.... »

Et, parmi les exemples qu'il traite, il s'en trouve plusieurs dans ce cas. Le plus simple est celui qu'offrent les courbes parallèles. Si, en effet, le point M′ est l'extrémité d'un segment constant MM′ porté sur la normale en M, la courbe ainsi obtenue a même normale, par suite même centre de courbure que la proposée, et ne constitue, par suite, pas pour celle-ci une adjointe infinitésimale.

Il nous a paru intéressant de préciser dans quels cas une construction, faisant correspondre un point M′ au point M et à la tangente MT en ce point, fournit effectivement une adjointe infinitésimale.

L'équation (1) donne aisément la réponse à cette question. En effet, pour que p' soit indépendant de $\frac{dp}{dx}$, il faut et il suffit, d'après la forme même de cette équation, que l'on ait

$$(2)\qquad \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}p}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}p}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial p}}{\frac{\partial\varphi}{\partial p}}.$$

Or, le premier membre de cette dernière équation représente le coefficient angulaire de la tangente à la courbe que décrit le point M′ lorsque, p étant constant, on fait varier x et y, c'est-à-dire lorsque, la tangente MT restant fixe, le point M se déplace sur cette tangente; de même, le second membre représente le coefficient angulaire de la tangente à la courbe que décrit le point M′, lorsque, x et y étant constants, on fait varier p, c'est-à-dire lorsque, le point M restant fixe, la tangente MT pivote autour de ce point. De là le critérium demandé :

Une construction faisant correspondre le point M′ *au point* M *et à la tangente* MT *en ce point donne naissance à une adjointe infinitésimale si, à partir de cha-*

cune de ses positions, le point M′ *décrit deux éléments non en contact, lorsque :* 1° *on fait glisser le point* M *sur la tangente* MT *rendue fixe ;* 2° *on fait tourner la tangente* MT *autour du point* M *rendu fixe.*

Ce résultat peut d'ailleurs être établi directement par le raisonnement bien simple que voici : Si la construction considérée fournit une adjointe infinitésimale, à chaque valeur du rayon de courbure en M correspond une direction différente pour la tangente en M′. Il suffit donc de s'assurer que, pour deux valeurs quelconques de ce rayon de courbure on obtient bien deux directions distinctes pour la tangente en M′. On peut, en particulier, choisir pour ce rayon de courbure une valeur infinie et une valeur nulle. A la première correspond la droite MT, à la seconde le point M considéré comme cercle de rayon nul.

On voit, en outre, que, si les éléments décrits par M′ dans ces deux cas sont en contact, leur direction commune est celle de la tangente en M′ pour une valeur quelconque du rayon de courbure en M.

L'application du critérium précédent est, en général, des plus aisées. Par exemple, dans le cas des adjointes des directions soit normales, soit tangentielles, rappelées plus haut, le premier des deux éléments considérés à partir de M′ est dirigé suivant PM′, le second suivant OM′, et ces deux éléments ne sont évidemment pas en contact ; tandis que, dans le cas des courbes parallèles, signalé ci-dessus comme exemple de la circonstance contraire, le premier élément est dirigé suivant la parallèle à MT menée par M′, le second suivant le cercle de centre M et de rayon MM′, et ces deux éléments sont bien en contact.

Il faut remarquer que, si la construction fait dépendre le point M′ de la tangente MT à l'exclusion du point M,

auquel cas le premier membre de (2) prend la forme $\frac{0}{0}$, le premier des deux éléments ci-dessus définis se réduit à un point, lequel peut toujours être considéré comme en contact avec toute ligne qui en est issue. Il est d'ailleurs bien facile de reconnaître *a priori* que la courbe obtenue n'est pas, en ce cas, une adjointe infinitésimale. Comme exemple d'une telle circonstance, on peut citer les polaires réciproques et les podaires.

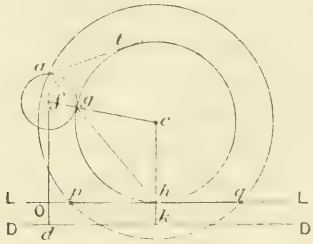
[K11e]

CONCOURS DE L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (1899). GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

Solution géométrique par M. ALLAN JERROLD.

Lieu des centres des cercles qui passent par un point donné a et détachent sur une droite donnée L *un segment pq de longueur constante.*

Soient apq un cercle répondant à la question et c son centre. Décrivons un second cercle concentrique au premier et tangent en h à la droite L. Joignons le point a



au point h et le centre c au point g, seconde intersection de ah avec le petit cercle.

La droite cg ainsi obtenue rencontre la perpendicu-

laire ao, abaissée de a sur L, en un point f qui est fixe, quelle que soit la position du centre c.

En effet, si l'on mène de a la tangente at au petit cercle, cette tangente, égale à ph, a une longueur constante, et, par suite, le produit

$$ag.ah = at^2$$

est aussi constant.

Le lieu du point g est donc un cercle, transformé par inversion de la droite L; et comme, par raison de symétrie, le centre de ce cercle, qui passe par a, se trouve sur ao, il doit coïncider avec le point f, à cause des triangles afg, gch, qui sont semblables et isoscèles.

La distance du centre c au point fixe f se compose donc du rayon cg, augmenté de la longueur constante gf. Si donc on prolonge ch d'une longueur hk égale à gf les points tels que k appartiennent à une droite D parallèle à L, et l'on voit que le lieu du point c est une parabole ayant f comme foyer et D comme directrice.

Remarque. — On voit immédiatement, sur la figure, que le paramètre de la parabole, égal à df et, par suite, à oa, est indépendant de la grandeur du segment pq.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1899. — COMPOSITIONS.

Besançon.

ANALYSE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Question de cours. *Exposer la théorie du changement de variables dans les intégrales doubles.*

Étant donné un système de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, *on considère le paraboloïde et le cylindre représentés par les équations*

$$x^2 + y^2 - 2az = 0,$$
$$x^2 + z^2 - 2az = 0,$$

où a est une constante positive; calculer le volume de la partie du cylindre intérieure au paraboloïde.

On a à effectuer l'intégrale double

$$2\int_0^{2a} dz \int_{-\sqrt{2az-z^2}}^{+\sqrt{2az-z^2}} \sqrt{2az - x^2}\,dx;$$

en la calculant d'après les méthodes classiques, on trouve $\frac{5}{2}\pi a^3$.

Épreuve pratique. — *Une surface de révolution engendrée par une cycloïde, tournant autour de sa base, est représentée par les deux équations*

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 - \cos u, \qquad z = u - \sin u;$$

calculer les aires comprises entre les parallèles de la surface correspondant aux valeurs suivantes du paramètre u :

$$u = 0, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}.$$

On a à calculer l'intégrale $8\pi\int \sin^3\frac{u}{2}\,du$, en prenant pour limites inférieures et supérieures

$$0, \quad \frac{\pi}{6}; \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{4}; \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}.$$

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Un point pesant est attaché à l'extrémité d'un fil inextensible suspendu à un point*

fixe : trouver la courbe sur laquelle le fil doit s'enrouler, pour que, dans le mouvement de ce pendule, la tension reste constante. Trajectoire du point M. *Loi du mouvement.*

En prenant pour axe des y une verticale dirigée vers le bas, désignant par α l'angle de la vitesse avec une horizontale, on a pour équations du mouvement

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{T}\sin\alpha, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - \mathrm{T}\cos\alpha.$$

T étant une constante. On déduit de ces équations l'équation des forces vives. De plus, en les combinant après les avoir multipliées respectivement par $-\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dx}{dt}$, et en désignant par v la vitesse, l'on a

$$mv\frac{dx}{dt} = mg\cos\alpha - \mathrm{T},$$

et, en combinant cette équation avec celle des forces vives, l'on a

$$y - y_0 = \frac{b}{(\mathrm{T} - mg\cos\alpha)^2}, \qquad dx = -\frac{2mgb\cos\alpha\, d\alpha}{(\mathrm{T} - mg\cos\alpha)^3};$$

les équations permettent de discuter la trajectoire qui est comprise entre deux horizontales fixes si $\mathrm{T} > mg$ et se compose alors d'une suite de boucles. Si $\mathrm{T} < mg$, la trajectoire se compose d'une boucle avec deux branches infinies et d'une courbe rappelant une hyperbole. La courbe sur laquelle le fil doit s'enrouler est la développée de celle-ci. L'arc de cette développée est égal, à une constante près, à $\frac{v}{\frac{d\alpha}{dt}}$; on déduit de là facilement les différentielles des coordonnées d'un de ses points par rapport à l'angle α, ce qui permet de la discuter. Quant à la

nature du mouvement, l'équation des forces vives montre que la vitesse ne peut jamais s'annuler.

Nancy.

Calcul différentiel et Calcul intégral.

Épreuve écrite. — 1° *Intégrer* $y''' + y' = tgx$.

2° *Équation différentielle des lignes de courbure.*

3° *Lignes de courbure de la surface engendrée par les tangentes à une hélice tracée sur un cylindre circulaire. Si un point décrit une ligne de courbure différente des génératrices rectilignes, l'un des centres de courbure principaux correspondants décrit une ligne géodésique du cylindre.*

Épreuve pratique. — *Aire d'une zone de paraboloïde de révolution comprise entre le sommet et un plan perpendiculaire à l'axe. Déterminer ce plan de façon que l'aire de la zone soit le double de l'aire latérale du cylindre de même base et de même hauteur, et résoudre numériquement l'équation trouvée.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — 1re Question. *Détermination de la densité moyenne de la Terre et de la constante f du système solaire au moyen de la balance à doubles plateaux.*

Valeur numérique de f : 1° *dans le système* C.G.S ; 2° *en prenant pour unités la distance moyenne de la Terre au Soleil, la masse du Soleil et l'année tropique.*

2e Question. *On considère le lieu géométrique des points de la surface terrestre pour lesquels une étoile* E *se lève ou se couche au moment où elle passe au méridien supérieur à Nancy.*

1° *Equation de ce lieu en coordonnées rectangulaires.*

2° *En coordonnées géographiques (longitude l et latitude φ).*

3° *Distinguer sur le lieu les points qui correspondent au lever et au coucher de l'étoile* E.

On connaît le grand axe $2x$ et l'excentricité e du méridien elliptique de la terre; on connaît aussi la longitude l_0 de Nancy et la déclinaison D *de l'étoile* E. *Les longitudes seront supposées comptées, à partir du méridien de Paris, de* 0° *à* 360° *vers l'Est.*

Épreuve pratique. — *La durée de la révolution sidérale de la planète découverte par M. Witt, le* 13 *août* 1898, *est de* $642^j,08$; *l'excentricité de son orbite est* 0,21139.

Calculer le temps qui s'écoule depuis le passage de la planète à son périhélie jusqu'au moment où son rayon vecteur est perpendiculaire au grand axe.

Algèbre supérieure.

Épreuve écrite. — 1re Question. *Démontrer que la fonction*

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u+v)}{\sigma u} e^{-u\zeta v},$$

où v est un argument constant, satisfait à chacune des équations différentielles

$$\left[\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\right]^2 = pu + pv + p(u+v), \qquad \frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)} = 2pu + pv.$$

2e Question. 1° *Si les coordonnées d'un point variable d'une courbe sont définies par les égalités*

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}, \qquad y = pu - p(u+v),$$

où u désigne un paramètre variable et v une constante, montrer que l'équation de la courbe est de la forme

$$y^2 = x^4 + 6\alpha_2 x^2 + 4\alpha_3 x + \alpha_4,$$

et que, réciproquement, on peut choisir les invariantes g_2 et g_3 de la fonction p et la valeur de la constante v de façon que les coefficients α_2, α_3, α_4 aient des valeurs données à l'avance.

2° *En supposant que l'on effectue sur x une transformation rationnelle linéaire qui ramène le polynome du quatrième degré précédent à la forme*

$$(1 - x'^2)(1 - k^2 x'^2),$$

former l'équation qui donne les valeurs de k, et en déduire les valeurs de ce paramètre pour lesquelles les quatre racines du polynome forment une proportion harmonique.

Épreuve pratique. — *Réduction à la forme canonique de Legendre des deux intégrales*

$$\omega = \int_3^x \frac{dx}{\sqrt{4x(x^2-9)}}, \qquad \omega_2 = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{4x(x^2-9)}}.$$

SESSION DE NOVEMBRE 1899. — COMPOSITIONS.

Besançon.

Analyse.

Épreuve écrite. — *Un angle droit* OMP, *dont le côté* MP *a une longueur constante a, se meut de telle sorte que son côté* OM *passe par un point fixe* O *et que le point* P *décrive une droite fixe* O*x passant par* O. *Le point* M *décrit alors une courbe passant par* O.

Evaluer l'aire comprise entre cette courbe et une corde OM_1 *faisant l'angle* α *avec l'axe* Ox. *Calculer le volume engendré par cette aire tournant autour de* Ox.

L'aire demandée a pour valeur $\frac{a^2}{2}\left(\cot\alpha + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; le volume demandé a pour valeur $\frac{2\pi a^3(1-\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha}$.

Épreuve pratique. — 1° *Sachant que l'on a*

$$\text{arc}\sin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1,3}{2,4}\frac{x^5}{5} + \ldots,$$

calculer arc $\sin\frac{1}{2}$ *à un millième près.*

2° *On considère l'hypocycloïde à trois rebroussements engendré par un point d'un cercle de rayon* $\frac{1}{3}$ *qui roule intérieurement sur un cercle de rayon* 1. *Calculer la longueur totale de cette courbe à un centième près.*

Pour la première question, on calcule les quatre premiers termes de la série à un dix-millième près. On ajoute et on laisse de côté la quatrième décimale.

Pour la seconde question, la longueur de la courbe est $\frac{16}{3}$, soit 5,33 avec l'approximation demandée.

Caen.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Trouver l'intégrale générale de l'équation*

$$z\frac{d^2z}{dx\,dy} - 2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} = 0;$$

chercher, parmi les surfaces représentées en coordon-

nées rectangulaires par cette intégrale, celle qui contient à la fois

1° *La droite* $x = 1$, $z = y + 1$.

2° *Le cercle* $y = 0$, $x^2 + z^2 - 2x = 0$.

Équation de la surface $\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} - \frac{y}{y+1}$.

II. *Déterminer les surfaces de révolution telles qu'en chacun de leurs points le rapport des rayons de courbure principaux aient une valeur donnée* α; *quelle doit être la forme de* α *pour que l'équation de la surface ne dépende que des fonctions circulaires ou logarithmiques? Étudier le cas de* $\alpha = -1$.

La question est classique : l'intégration n'amène que des fonctions élémentaires quand α est l'inverse d'un entier.

Pour $\alpha = -1$, la surface est une alysséide.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^7 y}{dx^7} + 3\frac{d^6 y}{dx^6} + 5\frac{d^5 y}{dx^5} + 7\frac{d^4 y}{dx^4} + 7\frac{d^3 y}{dx^3} + \int \frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = x^3 + e^{-x}.$$

$$y = (A + Bx + Cx^2)e^{-x} + (D + Ex)\cos x + (F + Gx)\sin x + x^3 - 6x^2 + 6x + \frac{x^3 e^{-x}}{24}.$$

Clermont.

Analyse.

Épreuve écrite. — *Trouver les courbes telles que la polaire d'un point* M *de la courbe par rapport à un cercle donné passe par le centre de courbure de la courbe au point* M; *en second lieu, telles que la polaire*

d'un point M *par rapport à un cercle donné divise le rayon de courbure du point* M *dans un rapport donné.*

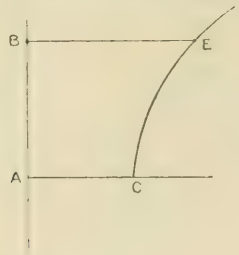
Épreuve pratique. — *Caluler à* $\frac{1}{10000}$ *près la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx.$$

Mécanique.

Épreuve écrite. — *L'extrémité* A *d'une barre rectiligne, homogène, pesante, glisse sans frottement sur un plan horizontal. Trouver le mouvement de cette barre. Calcul de la réaction en* A.

Épreuve pratique. — *On considère l'aire plane homogène* ASEB *limitée par un arc* SE *de parabole, la partie* AS *de l'arc qui va du sommet à la directrice, une portion* AB *de la directrice et la parallèle* BE *à*



l'arc. Calculer les distances du centre de gravité de l'aire aux droites AS *et* AB, *ainsi que les moments d'inertie de cette aire par rapport aux droites* AS *et* AB *en supposant*

AS = 40, BE = 90. Densité de l'aire = 1.

Dijon.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *Assigner les valeurs des constantes a, b, c pour lesquelles il existe quelque surface jouissant de la propriété que sa normale au point* (x, y, z) *passe toujours par le point* (ay, bx, cz); *former l'équation générale de ces surfaces dans l'hypothèse* $c \neq 1$, *et examiner le cas où l'on a* $c = 1$.

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Deux tiges articulées* AB, AC *homogènes, pesantes, sont assujetties à rester dans un plan vertical sans frottement. Les extrémités libres* B *et* C *glissent sans frottement sur une horizontale.*

Épreuve pratique. — *Calculer la déviation produite par la force centrifuge composée due au mouvement de rotation de la Terre dans la chute d'un corps.*

Données :

Hauteur de chute	500^m
Accélération de la pesanteur	9,8088
Latitude	48° 50′ 11″
Durée du jour sidéral	86164 *secondes de temps moyen.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Établir la fonction de s qui représente la probabilité pour qu'une erreur soit comprise entre o et s. Définition de l'erreur moyenne, de l'erreur probable.*

Épreuve pratique. — *Évaluer la probabilité pour*

qu'une erreur soit comprise entre $\pm z$, z *étant égal aux* $\frac{4}{10}$ *de l'erreur probable.*

On sait que l'erreur probable η *et la constante* h *sont liées par la relation* $h\eta = 0,4769363$.

Grenoble.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *Une surface réglée* Σ *est engendrée par le mouvement d'une droite* G *qui se meut d'une façon déterminée en rencontrant constamment une courbe directrice* D, *et l'on demande quelle condition doit être remplie pour que la courbe* D *soit la ligne de striction de la surface* Σ. *On détermine la normale à la surface* Σ *en un point de la ligne* D.

Montrer que, dans le cas où la droite G *rencontre constamment la courbe* D *sous un angle constant, cette courbe est une ligne géodésique de la surface* Σ.

Application. — *Un cercle étant donné, trouver une surface réglée dont ce cercle soit la ligne de striction, les génératrices rencontrant cette courbe sous un angle constant.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$u = \int_0^x \frac{\sin mx}{x(x^2 + a)^2}\, dx,$$

m et a étant réels et positifs.

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Un point matériel non pesant* M, *mobile sans frottement sur un paraboloïde de révolution dont l'équation* $r = \frac{x^2 + y^2}{2p}$, *est soumis à l'ac-*

tion d'une force parallèle à O*r et fonction connue de la distance r du point au plan tangent au sommet*

$$Z = mf(r) \qquad (m \text{ masse du point})$$

1° *Trouver le mouvement du point, la projection de sa trajectoire sur le plan xy, et la réaction de la surface;*

2° *Traiter complètement la question quand*

$$Z = -\frac{m\mu}{r^2}, \quad (\mu > 0);$$

3° *Déterminer la fonction f(r) de telle sorte qu'on puisse disposer des données initiales de façon que la réaction soit constamment nulle.*

Épreuve pratique. — *Un tétraèdre homogène* OABC, *de densité p, est tel que le trièdre* O *est trirectangle et les trois arêtes* OA, OB, OC *sont égales à une même longueur a. On prend les trois droites* OA, OB, OC *pour axes xyr et l'on demande :*

1° *De former les sommes* Σmx^2, Σmy^2, Σmr^2, Σmyr, Σmrx, Σmxy, *m étant un élément de la masse du corps au point xyr;*

2° *Écrire l'équation de l'ellipsoïde d'inertie du corps relativement au point* O *par rapport aux axes xyr;*

3° *Rapporter cet ellipsoïde à un système d'axes principaux d'inertie et trouver les valeurs des moments principaux.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Établir les formules des corrections de parallaxe :*

1° *Pour les coordonnées équatoriales;*

2° *Pour les coordonnées azimutales.*

Épreuve pratique. — *Étant donnés les trois côtés a, b, c d'un triangle sphérique, calculer les angles* A, B, C *et les variations qu'éprouvent les angles* A, B, C *quand les côtés éprouvent des accroissements* δa, δb, δc.

Données numériques :

$a = 113^\circ 2' 56'',64$, $b = 82^\circ 29' 28'',40$, $c = 74^\circ 54' 31'',06$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1789.

(1898, p. 148)

Les cordes communes à l'ellipse et à ses cercles osculateurs en deux points conjugués se rencontrent sur une courbe ayant même aire que l'ellipse.

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Soient $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ les coordonnées d'un point P de l'ellipse. La corde commune à l'ellipse et à son cercle osculateur au point P coupe la conique en un second point P′ de coordonnées $x = a\cos 3\varphi$, $y = -b\sin 3\varphi$, conséquence d'un théorème bien connu sur la somme des angles excentriques des points d'intersection d'un cercle avec une ellipse.

La corde PP′ aura donc pour équation

$$bx\cos\varphi - ay\sin\varphi = ab\cos 2\varphi.$$

On trouvera la corde correspondant à un point conjugué de P en remplaçant φ par $\gamma a + \varphi$, d'où

$$bx\sin\varphi + ay\cos\varphi = ab\cos 2\varphi.$$

Ces deux droites se coupent en un point de coordonnées

$$x = a(\cos\varphi - \sin\varphi)\cos 2\varphi,$$
$$y = b(\cos\varphi - \sin\varphi)\cos 2\varphi.$$

Pour évaluer la surface limitée pour cette courbe, utilisons la formule

$$S = \pm 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \frac{dy}{d\varphi} - y \frac{dx}{d\varphi} \right) d\varphi,$$

d'où après quelques réductions

$$S = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\varphi . d\varphi$$

$$= 2ab \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi . d\varphi = ab\pi.$$

Question 1791.

(1898, p. 195.)

Dans un quadrangle quelconque ABCD, *soient :*

α *le cercle passant par les projections de* A *sur les côtés du triangle* BCD ;

β *le cercle passant par les projections de* B *sur les côtés de* CDA ;

γ *le cercle passant par les projections de* C *sur les côtés de* DAB ;

δ *le cercle passant par les projections de* D *sur les côtés de* ABC.

Démontrer que les cercles α, β, γ, δ *passent par le même point, qui est le point commun aux cercles d'Euler des triangles* BCD, CDA, DAB, ABC. (G. Gallucci.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Le théorème proposé est une conséquence directe des deux propositions bien connues :

1. Les projections orthogonales d'un point quelconque d'une hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit déterminent une circonférence qui passe par le centre de la courbe (voir *Nouvelles Annales,* 3e série, t. IV, p. 525).

2. Le lieu géométrique des centres des hyperboles équila-

tères circonscrites à un triangle donné est le cercle d'Euler de ce triangle.

Les huit circonférences proposées se coupent au centre de l'hyperbole équilatère circonscrite au quadrangle ABCD.

Question 1792.

(1898, p. 195.)

Démontrer la formule

$$(-1)^k C_{m-1}^k = 1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \ldots + (-1)^k C_m^k,$$

où C_m^k désigne le nombre des combinaisons simples de m lettres k à k. (A. Cazamian.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

On a la relation bien connue

$$C_m^\lambda = C_{m-1}^{\lambda-1} + C_{m-1}^\lambda.$$

En faisant varier λ de o à k on a la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
1 &= 1, \\
C_m^1 &= 1 + C_{m-1}^1, \\
C_m^2 &= C_{m-1}^1 + C_{m-1}^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
C_m^{k-1} &= C_{m-1}^{k-2} + C_{m-1}^{k-1}, \\
C_m^k &= C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k.
\end{aligned}$$

Additionnons ces égalités après les avoir multipliées respectivement par $(-1)^0$, $(-1)^1$, $(-)^2$, ..., $(-1)^k$; on a

$$(-1)^k C_{m-1}^k = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} (-1)^\lambda C_m^\lambda.$$

QUESTIONS.

1850. Soient, dans la circonférence circonscrite au triangle ABC, α, β, γ les points diamétralement opposés aux sommets A, B, C :

$\beta\gamma$ coupe AC et AB en l et l';
$\alpha\gamma$ coupe BA et BC en m et m';
$\alpha\beta$ coupe CB et CA en n et n'.

On mène lO_1, mO_1, nO_1 respectivement perpendiculaires à CO, AO, BO, de même l_1O_2, m_1O_2, n_1O_2 respectivement perpendiculaires à BO, CO, AO.

Démontrer que :

1° Les trois droites lO_1, mO_1, nO_1 se coupent en un même point O_1;

2° Les trois droites l_1O_2, m_1O_2, n_1O_2 se coupent en un même point O_2;

3° Les trois points O_1, O, O_2 sont en ligne droite et

$$OO_1 = OO_2;$$

4° La droite O_1O_2 est parallèle à la droite de Brocard du triangle ABC. (A. Droz-Farny.)

1851. Soient ABC un triangle et Σ une conique circonscrite donnés.

Les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A rencontrent, pour la seconde fois, Σ en α et α'. Les cordes $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ se coupent en un même point P.

Si la conique Σ passe par un quatrième point fixe D, quel sera le lieu de P pour toutes les coniques du faisceau ABCD? (A. Droz-Farny.)

ERRATA.

3e série, Tome XVIII, 1899, p. 580, dernière colonne, *biffez* 1790 (*voir* même t., p. 532).

Page 591, deuxième colonne, *ajoutez à sa place alphabétique* C. Servais, 532.

Tome XIX, 1900, p. 53, lignes 4 et suivantes, *au lieu de*

$$p + q\cos\Phi = p = p_1\sin\Phi,$$

lisez

$$p + q\cos\Phi = \mathrm{p} = p_1\sin\Phi,$$

et corrections analogues.

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1900.

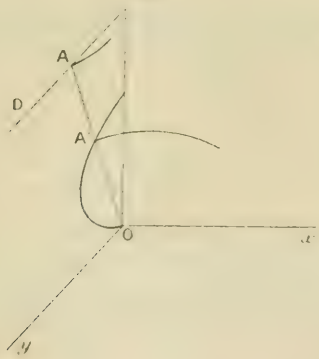
Sujet.

Les axes Ox, Oy, Oz *étant supposés rectangulaires, on donne dans le plan* yOx *le cercle* (C) *et la droite* (D) *définis par les équations*

$$(C) \qquad y^2 + z^2 - c'z = 0,$$
$$(D) \qquad z - c = 0,$$

puis on considère une hyperbole équilatère (H) *située dans un plan* (H) (*fig.* 1) *passant par* Oz

Fig. 1.



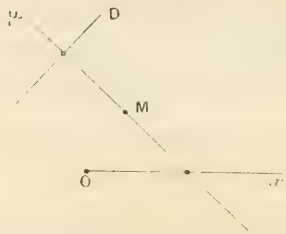
et dont les sommets réels A *et* A' *sont situés, le premier sur la droite* (D), *le second sur le cercle* (C) (*le point* A' *étant distinct du point* O).

1° *Lorsque le plan* H *tourne autour de* Oz,

l'hyperbole (H) *engendre une surface du troisième ordre* (S) *tangente au plan des xy tout le long de l'axe* Ox.

2° *On considère une droite variable* (Δ) *assujettie à s'appuyer sur* Ox *et sur la droite* (D), *et le point* M (*fig.* 2), *non situé sur* Ox *ou sur* (D),

Fig. 2.



intersection de la droite Δ *et de la surface cubique* (S).

Montrer que les coordonnées du point M *s'expriment rationnellement en fonction des deux coordonnées variables du point* μ, *trace de la droite* Δ *sur le plan* $z = 2c$.

3° *Quand le point* M *décrit la section de la surface* (S) *par un plan* (P), *le point* μ *décrit une cubique* (Γ) *quand le plan* (P) *varie, la cubique* (Γ) *passe par six points fixes qui sont les sommets d'un quadrilatère complet.*

4° *Trouver toutes les droites tracées sur la surface.*

5° *Quand le point* M *se déplace sur la surface* (S) *de façon que le plan tangent en* M *passe par un point fixe de l'espace,* Q, *le point* μ *décrit une conique.*

Où doit se trouver le point fixe pour que cette conique se décompose en deux droites ou se réduise à une droite double?

Que peut-on conclure de là pour le cône circonscrit à la surface (S) *et dont le sommet est le point* Q?

6° *Étudier le lieu du point* M *quand le point* μ *décrit une droite située dans le plan* $z = 2c$.

Conditions.

Le Concours est ouvert à *tous* les lecteurs des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

1° A un crédit de 100fr d'Ouvrages à choisir dans le Catalogue de M. Gauthier-Villars;

2° A la publication du Mémoire;

3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la Rédaction AVANT LE 15 NOVEMBRE 1900, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonyme. Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir du 15 novembre et après le jugement prononcé.

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mémoires; mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du

reste que l'insertion d'un Travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 15 décembre 1900, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La Rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1° De partager les récompenses ci-dessus mentionnées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite;

2° De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient reportés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire immédiatement connaître s'il désire que la publication de son Travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

Les Rédacteurs.

[K1c]

POUR LA GÉOMÉTRIE RÉCENTE;

Par M. Giacomo CANDIDO, à Pise.

Cette Note est une continuation d'un précédent article [1]; pour abréger, je ne reproduirai pas les formules

[1] *Formules pour l'étude d'une figure remarquable* (*N. A.*, 1899, p. 31).

que j'y ai indiquées. J'en ai ajouté d'autres, quelques-unes tirées de l'article de M. le professeur Ferrari (mentionné *loc. cit.*); et d'autres qui résultent de la combinaison de celles-ci et de celles trouvées par moi dans l'article dont je viens de parler.

Voici les matières qui y sont développées :

Point de Lemoine et sa généralisation, indication sur le cercle de Lemoine; angle, point, cercle de Brocard; théorème d'où découle comme cas particulier le point de Gergonne; quelques points qui proviennent d'un théorème de M. Terquem; formules générales sur le triangle podaire et sur le triangle pédal d'un point, et quelques observations pouvant être d'une certaine utilité.

Les formules fondamentales dont je me suis servi peuvent, à mon avis, rendre des services dans les questions de Géométrie récente.

Indiquons par x, y, z les distances de P à a, b, c, respectivement; on a alors

$$
(\mathrm{A})\quad \left\{
\begin{aligned}
z &= \mathrm{AP}\sin\theta &&= \frac{bp\sin\mathrm{A}\sqrt{(1+p)(b^2p+c^2)-a^2p}}{(1+p+pq)\sqrt{b^2p^2+c^2+2bc\cos\mathrm{A}}},\\
y &= \mathrm{AP}\sin(\mathrm{A}-\theta) &&= \frac{c\sin\mathrm{A}\sqrt{(1+p)(b^2p+c^2)-a^2p}}{(1+p+pq)\sqrt{b^2p^2+c^2+2bc\cos\mathrm{A}}},\\
y &= \mathrm{CP}\sin\xi &&= \frac{am\sin\mathrm{C}\sqrt{(1+m)(a^2m+b^2)-mc^2}}{(1+m+mp)\sqrt{a^2m^2+b^2+2abm\cos\mathrm{C}}},\\
x &= \mathrm{CP}\sin(\mathrm{C}-\xi) &&= \frac{b\sin\mathrm{C}\sqrt{(1+m)(a^2m+b^2)-mc^2}}{(1+m+mp)\sqrt{a^2m^2+b^2+2abm\cos\mathrm{C}}},\\
x &= \mathrm{BP}\sin\varphi &&= \frac{cq\sin\mathrm{B}\sqrt{(1+q)(c^2q+a^2)-b^2q}}{(1+q+mq)\sqrt{c^2q^2+a^2+2acq\cos\mathrm{B}}},\\
z &= \mathrm{BP}\sin(\mathrm{B}-\varphi) &&= \frac{a\sin\mathrm{B}\sqrt{(1+q)(qc^2+a^2)-b^2q}}{(1+q+mq)\sqrt{c^2q^2+a^2+2acq\cos\mathrm{B}}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Supposons maintenant qu'on demande quelles sont les valeurs de m, p, q pour lesquelles on a

$$x = y = z.$$

Égalisant alors deux à deux les valeurs de x, y, z que nous avons données, on a

$$bp \sin A = c \sin A, \qquad am \sin C = b \sin C, \qquad qc \sin B = a \sin B,$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{c}{b}, \qquad m = \frac{b}{a}, \qquad q = \frac{a}{c}.$$

On voit tout de suite que dans ce cas le point P *est le centre du cercle inscrit.*

Supposons qu'on demande que le point P soit tel qu'on ait

$$ax = by = cz,$$

alors répétant la même opération que ci-dessus, on a

$$pbc \sin A = bc \sin A,$$
$$mab \sin C = ab \sin C,$$
$$qac \sin B = ac \sin B,$$

d'où l'on tire

$$m = p = q = 1,$$

et le point demandé est le barycentre du triangle.

Supposons encore que l'on veuille savoir quel est le point pour lequel on a

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

il résulte toujours de nos formules

$$p\frac{b}{c} = \frac{c}{b}, \qquad m\frac{a}{b} = \frac{b}{a}, \qquad q\frac{c}{a} = \frac{a}{c},$$

d'où

$$p = \frac{c^2}{b^2}, \qquad m = \frac{b^2}{a^2}, \qquad q = \frac{a^2}{c^2},$$

et le point demandé est précisément le point de Lemoine.

Enfin supposons qu'on demande les valeurs de m, p, q pour lesquelles on a

$$\frac{x}{a^{n-1}} = \frac{y}{b^{n-1}} = \frac{z}{c^{n-1}},$$

alors

$$m = \frac{b^n}{a^n}, \qquad p = \frac{c^n}{b^n}, \qquad q = \frac{a^n}{c^n}.$$

Ce point a été étudié par MM. G. Longchamps, Thiry, Lugli, etc.; nous l'indiquerons par K_n.

La formule du professeur Ferrari

$$(B) \quad \overline{PQ}^2 = \frac{\overline{AQ}^2 + m\overline{BQ}^2 + mp\overline{CQ}^2}{1 + m + mq} - \frac{mpa^2 + b^2q + c^2}{(1 + m + mp)^2}m,$$

que le lecteur interprétera aisément, permet d'établir l'existence du cercle de Lemoine; on peut voir, pour le développement de ces idées, le beau Mémoire de M. Thiry déjà cité. On observera, en outre, que la formule (B) comprend, dans sa généralité, des résultats obtenus pour le calcul des distances particulières.

2. Construisons par nos formules

$$\operatorname{tang}\xi = \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\omega:$$

on a

$$(1) \quad \frac{bp\sin A}{c + bp\cos A} = \frac{cq\sin B}{a + cq\cos B} = \frac{am\sin C}{b + am\cos C} = \operatorname{tang}\omega.$$

On a alors aussi l'équation

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} &(\cot\omega - \cot A)(\cot\omega - \cot B)(\cot\omega - \cot C) \\ &\quad = \frac{1}{\sin A \sin B \sin C}, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4s}.$$

De (1), substituant la valeur trouvée pour tang ω,

$$m = \frac{b}{a \sin C(\cot A + \cot B)},$$

$$p = \frac{c}{b \sin A(\cot B + \cot C)},$$

$$q = \frac{a}{c \sin B(\cot A + \cot C)},$$

d'où

$$m = \frac{b^2}{c^2}, \qquad p = \frac{c^2}{a^2}, \qquad q = \frac{a^2}{b^2}.$$

Nous indiquerons par Ω le point déterminé par ces valeurs de m, p, q.

Construisons, de même,

$$\operatorname{tang}(A - \theta) = \operatorname{tang}(B - \varphi) = \operatorname{tang}(C - \zeta) = \operatorname{tang}\omega';$$

on obtient

$$(2) \qquad \frac{c \sin A}{bp + c \cos A} = \frac{a \sin B}{cq + a \cos B} = \frac{b \sin C}{am + b \cos C} = \operatorname{tang}\omega',$$

d'où résulte une équation identique à (1'), et, par suite,

$$(3) \qquad \cot\omega = \cot\omega' = \Sigma \cot A = \frac{\Sigma a^2}{4s}.$$

Le point déterminé par les valeurs de m, p, q indiquées dans (2) sont

$$m = \frac{b}{a} \sin C(\cot A + \cot B),$$

$$p = \frac{c}{b} \sin A(\cot B + \cot C),$$

$$q = \frac{a}{c} \sin B(\cot A + \cot C),$$

d'où

$$m = \frac{c^2}{a^2}, \qquad p = \frac{a^2}{b^2}, \qquad q = \frac{b^2}{c^2}.$$

Nous indiquerons par Ω' le point déterminé par ces valeurs de m, p, q.

L'angle ω indiqué dans (3) est l'angle de Brocard.

Les deux points Ω et Ω' sont les points de Brocard.

Au moyen de la formule (B) et en tenant compte de ce qu'on a trouvé auparavant, on calcule facilement les distances $\overline{OK_2}$, $\overline{O\Omega}$, $\overline{K_2\Omega}$, où O est le centre du cercle circonscrit au triangle; K_2 et Ω sont respectivement les points de Lemoine et de Brocard. On a

$$\overline{OK_2}^2 = R^2(1 - 3\tang^2\omega),$$

$$\overline{\Omega K_2}^2 = 4R^2\sin^2\omega - 3R^2\tang^2\omega,$$

$$\overline{\Omega O}^2 = R^2 - \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2},$$

d'où l'on tire

$$\overline{OK_2}^2 = \overline{\Omega K_2}^2 + \overline{O\Omega}^2,$$

et de là on conclut que :

Le point Ω *se trouve sur le cercle qui a pour diamètre* OK_2.

Par analogie, on démontre que Ω' se trouve sur la même circonférence.

La circonférence sur laquelle se trouvent Ω, Ω', K_2, O *est celle qu'on appelle* circonférence de Brocard.

3. Proposons-nous le problème suivant :

Quels sont les points tels que les droites qui joignent leurs projections sur les côtés avec les sommets du triangle soient concourantes ?

De nos formules on déduit, en indiquant par P_a, P_b,

P_e les projections de P sur a, b, c respectivement

$$BP_b = \frac{a + cq\cos B}{\sqrt{c^2q^2 + a^2 + 2acq\cos b}}\,\frac{\sqrt{(1+q)(c^2q+a^2) - b^2q}}{1+q+mq},$$

$$P_aC = \frac{am + b\cos C}{\sqrt{a^2m^2 + b^2 + 2acq\cos B}}\,\frac{\sqrt{(1+m)(a^2m+b^2) - mc^2}}{1+m+mp},$$

$$CP_b = \frac{b + am\cos C}{\sqrt{a^2m^2 + b^2 + 2acq\cos B}}\,\frac{\sqrt{(1+m)(a^2m+b^2) - mc^2}}{1+m\,mp},$$

$$P_bA = \frac{bp + c\cos A}{\sqrt{b^2p^2 + c^2 + 2bcp\cos A}}\,\frac{\sqrt{(1+p)(b^2p^2+c^2) - a^2p}}{1+p+pq},$$

$$AP_c = \frac{bp + c\cos A}{\sqrt{b^2p^2 + c^2 + 2bcp\cos V}}\,\frac{\sqrt{(1+p)(b^2p^2+c^2) - a^2p}}{1+p+pq},$$

$$P_cB = \frac{cq + a\cos B}{\sqrt{c^2q^2 + a^2 + 2acq\cos B}}\,\frac{\sqrt{(1+q)(c^2q+a^2) - b^2q}}{1+q+mq}.$$

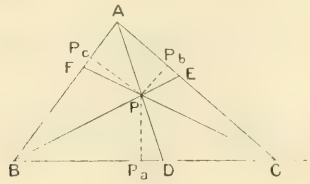
Puisque AP_a, BP_a, CP_c concourent en un point, on doit avoir

$$\overline{AP_c}.\overline{BP_a}.\overline{CP_b} = \overline{P_cB}.\overline{P_aC}.\overline{P_bA},$$

équation qui, par les formules précédentes, devient

$$(\alpha)\quad a\left(\frac{c^2}{p} - b^2p\right)(\cos B\cos C - \cos A)$$
$$+ b\left(\frac{a^2}{q} - c^2q\right)(\cos A\cos C - \cos B)$$
$$+ c\left(\frac{b^2}{m} - a^2m\right)(\cos A\cos B - \cos C) = 0,$$

et aux valeurs de m, p, q qui satisfont à cette équation correspond un point demandé.



L'équation (α) est vérifiée par $\frac{b}{a} = m$, $\frac{c}{b} = p$, $\frac{a}{c} = q$,

ce qui nous donne comme point P′ le point de Gergonne.

On peut dire la même chose du point conjugué isotomique de P. Le point de Gergonne peut s'obtenir encore d'une autre manière, que nous indiquerons brièvement.

Le théorème suivant est bien connu [1] :

En joignant un point T_1 *aux sommets d'un triangle, le cercle qui passe par les trois points* T_{1a}, T_{1b}, T_{1c} *déterminés sur les côtés* a, b, c *par les droites* AT_1, BT_1, CT_1 *coupe les côtés en trois autres points* T_{2a}, T_{2b}, T_{2c} *tels que les droites qui les joignent aux sommets opposés sont concourantes en un point* T_2.

Nous appellerons *points de Terquem* les points T_1, T_2.

Relativement à ces points, indiquons le théorème suivant :

Si le point T_1 *est déterminé par les rapports* m, p, q, *le point* T_2 *est déterminé par les rapports*

$$m' = \frac{\dfrac{a^2}{1-m} - \dfrac{b^2 p}{1-p} + \dfrac{c^2 pq}{1+q}}{\dfrac{a^2}{1+m} + \dfrac{b^2 p}{1-p} - \dfrac{c^2 pq}{1+q}},$$

$$p' = \frac{\dfrac{b^2}{1-p} - \dfrac{c^2 q}{1+q} + \dfrac{a^2 mq}{1+m}}{\dfrac{b^2}{1+p} - \dfrac{c^2 q}{1-q} - \dfrac{a^2 mq}{1-m}},$$

$$q' = \frac{\dfrac{c^2}{1-q} - \dfrac{a^2 m}{1-m} + \dfrac{b^2 mp}{1-p}}{\dfrac{c^2}{1+q} + \dfrac{a^2 m}{1+m} - \dfrac{b^2 mp}{1-p}}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette proposition.

---

[1] V. J., p. 401; 1874.

Si l'un des points de Terquem est le barycentre, on a alors $m = p = q = 1$; et, en correspondance,

$$m' = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{c \cos B}{b \cos C}, \qquad p' = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{a \cos C}{c \cos A},$$

$$q' = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{b \cos A}{a \cos B};$$

on voit que le second point de Terquem est l'orthocentre du triangle. Au moyen des formules établies dans les paragraphes précédents, on trouve même le cas où $m' = m$, $p' = p$, $q' = q$, ou bien le cas où les deux points de Terquem sont coïncidents, et de cette manière on a de nouveau le point de Gergonne.

4. *Surface σ du triangle pédal du point* P. — Par nos formules, on a

$$PD = \frac{pq\sqrt{(1+p)(c^2p + b^2) - a^2p}}{(1+p)(1-p+pq)},$$

$$PE = \frac{mq\sqrt{(1+q)(c^2q + a^2) - b^2q}}{(1-q)(1-q+mq)},$$

$$PF = \frac{mp\sqrt{(1-m)(a^2m + b^2) - c^2m}}{(1+m)(1+m-mp)};$$

$$\sin \widehat{EPD} = \sin\theta \cos(B - \varphi) + \cos\theta \sin(B - \varphi),$$

$$\sin \widehat{DPF} = \sin\xi \cos(A - \theta) + \cos\xi \sin(A - \theta),$$

$$\sin \widehat{FPE} = \sin\varphi \cos(C - \xi) + \cos\varphi \sin(C - \xi).$$

De cette manière, on connaît tous les éléments nécessaires pour le calcul de la surface σ; calcul que nous omettons, pour abréger, et qui donne la formule très simple

$$\sigma = \frac{2S}{(1+p)(1+m)(1+q)} \quad (2S = \text{surface du triangle ABC}).$$

Si le point P est le point K_n, on a

$$\sigma = \frac{2 S a^n b^n c^n}{(a^n - b^n)(a^n + c^n)(b^n + c^n)}.$$

Observons particulièrement que de cette formule on déduit que : *Les surfaces des triangles pédals* (¹) *des points de Lemoine et de Brocard sont données par l'unique formule*

$$\sigma = \frac{2 S a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}.$$

De la formule générale qui donne σ, on déduit que

La surface σ_1 du triangle pédal du point isotomique du point P *est précisément σ.*

5. *Surface S_p du triangle podaire du point* P. — De nos formules (A), on déduit aussi la surface du triangle podaire du point P, qui est :

$$\begin{aligned} S_p = & \frac{p S[(1+p)(b^2 p + c^2) - a^2 p] \sin^2 A}{(1 + p + pq)^2 (b^2 p^2 + c^2 + 2 bcp \cos A)} \\ & + \frac{m S[(1+m)(a^2 m + b^2) - mc^2] \sin^2 B}{(1 + m + mp)^2 (a^2 m^2 + b^2 + 2 abm \cos C)} \\ & + \frac{q S[(1+q)(c^2 q + a^2) - b^2 q] \sin^2 C}{(1 + m + mq)^2 (c^2 q^2 + a^2 + 2 acq \cos B)}. \end{aligned}$$

Si le point P est le barycentre du triangle, on a

$$S_p = \frac{S(a^2 + b^2 + c^2)}{(6R)^2}.$$

Si le point P est le point de Lemoine, on a

$$S_p = \frac{12 S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

(¹) Triangle obtenu en joignant deux à deux les pieds de trois cériennes concourantes.

6. *Remarque.* — Il faut observer que l'interprétation géométrique de quelques identités algébriques entre les m, p, q est parfois utile. Nous en donnerons un exemple : On vérifie aisément l'identité

$$\text{(I)} \qquad \frac{mp}{1+m+mp} + \frac{pq}{1+p+pq} + \frac{mq}{1+q+mq} = 1.$$

L'interprétation géométrique résultant de nos formules est la suivante :

Si trois droites tirées par les sommets d'un triangle se coupent en un même point P, *on a la relation*

$$\frac{DP}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1.$$

De la relation (I), on déduit aussi les autres identités algébriques

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{1+m+mp} + \frac{1}{1+p+pq} + \frac{1}{1+q+mq} = 1,$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{m}{1+m+mp} + \frac{p}{1+p+pq} + \frac{q}{1+q+pq} = 1,$$

qui, sommées, donnent

$$\frac{1+m}{1+m+mp} + \frac{1+p}{1+p+pq} + \frac{1+q}{1+q+mq} = 2,$$

relation dont l'interprétation géométrique est la suivante : *Si trois droites menées par les sommets d'un triangle se coupent en un point* P, *on a :*

$$\frac{AP}{AD} + \frac{BP}{BE} + \frac{CP}{CF} = 2.$$

Comme on le voit, les trois identités (I), (II), (III) se déduisent les unes par les autres ; mais il y a plus : Si l'une de ces identités, par exemple (III), appartient au

point P, alors une de celles qui restent, et en ce cas la relation (II), appartient au point conjugué isotomique de P. C'est ce que le lecteur vérifiera aisément.

[F8f] [H11d]

EXPOSITION GÉOMÉTRIQUE ÉLÉMENTAIRE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

C'est par le calcul intégral que les fonctions elliptiques se sont introduites dans la Science, et c'est dans le calcul intégral qu'il faut puiser les démonstrations de leurs propriétés et les méthodes de calcul si l'on veut de la rigueur et de la généralité. Mais l'emploi des intégrales prises entre des limites imaginaires fait appel à des connaissances peu familières au début; et, tout en laissant de côté les méthodes de calcul des fonctions elliptiques, il y a profit à se rendre compte auparavant, par des moyens plus simples, de leurs propriétés principales et en particulier de leur double périodicité. C'est ce qu'on a essayé de faire dans ce Travail au moyen d'une représentation géométrique qui fût la *généralisation d'une représentation convenable des fonctions circulaires*.

Nous considérerons les anciennes fonctions elliptiques sn, cn et dn, en nous bornant même à la première à laquelle les deux autres se ramènent facilement, puis nous dirons quelques mots de la fonction $\wp$ de Weierstrass.

Comme sn dégénère soit en sinus, soit en tangente hyperbolique, nous examinerons d'abord ces deux fonctions et, avec plus de détails, la première, la plus familière, pour laquelle la représentation géométrique sera bien facile à comprendre. La méthode s'étendra ensuite tout naturellement à la seconde et au cas général de sn.

Notre point de départ sera le théorème d'addition.

I. — Sinus.

1. Considérons d'abord une fonction de p que nous appellerons $\sin p$ telle que l'on ait

1° $$\sin(p+q) = \sin p\sqrt{1-\sin^2 q} + \sin q\sqrt{1-\sin^2 p},$$

2° $$\sin 0 = 0,$$

3° $$\left(\frac{d\sin p}{dp}\right)_{p=0} = 1.$$

Nous admettrons ici qu'une telle fonction existe [1]. Supposons p constant et q variable; posons

$$\sin p = a, \qquad \sin q = x, \qquad \sin(p+q) = y,$$

on a

$$y = a\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-a^2}. \tag{1}$$

Nous supposerons a réel positif plus petit que 1, et x réel et plus petit que 1 en valeur absolue.

---

[1] Abel a donné (*Œuvres complètes*, t. I, p. 64; 1881) les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une relation donnée

$$\Xi[F(p)F(q)]$$

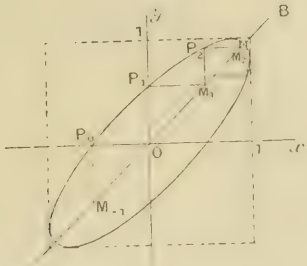
entre $F(p)$ et $F(q)$ représente un théorème d'addition. Il faut que Ξ ne change pas quand on permute p et q. Il faut de plus que, si l'on remplace $F(q)$ par $\Xi[F(q), F(r)]$ la fonction

$$\Xi\{Fp.\Xi[F(q).F(r)]\}$$

ne change pas quand on permute p, q et r.

Sur deux axes rectangulaires Ox, Oy (*fig.* 1) con-

Fig. 1.



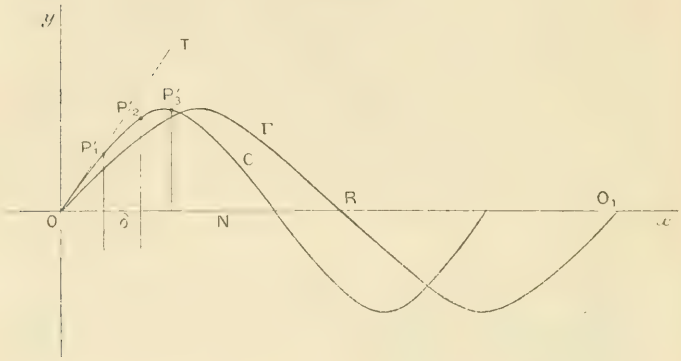
struisons la courbe représentée par l'équation (1). C'est une ellipse dont le grand axe est dirigé suivant la bissectrice positive de l'angle xOy; elle est tangente aux quatre droites $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Les deux racines de l'équation $y = x$, sont plus petites que 1 en valeur absolue.

2. Cela posé, partons du point P_0 où l'ellipse coupe la partie négative de l'axe Ox et traçons la ligne brisée $P_0OP_1M_1P_2\ldots$ dont les côtés sont tour à tour parallèles à Ox et à Oy; dont les sommets sont alternativement sur l'ellipse et sur la bissectrice positive OB de l'angle xOy, et en ayant soin de *prendre parmi les deux intersections, quand elles sont distinctes, d'une verticale avec l'ellipse celle qui n'est pas symétrique* (P_2 par exemple) *du point précédent* (P_1) *par rapport à* OB.

D'autre part, sur deux axes rectangulaires Oz, Oy, construisons une courbe C de la manière suivante : Marquons sur Oz les points d'abscisses δ, 2δ, ... δ étant une longueur arbitraire, puis, aux ordonnées correspondantes, les points P'_1, P'_2, ... ayant mêmes ordonnées

que M_1, M_2, ... ou, ce qui revient au même, que P_1, P_2, ... (*fig.* 2) et faisons passer par l'origine et par ces

Fig. 2.



points une courbe continue C. Menons la tangente OT à l'origine, mesurons le coefficient angulaire t de cette tangente; puis traçons une courbe Γ d'ordonnées égales à celles de C, mais d'abscisses t fois plus grandes. La courbe Γ représente la fonction $\sin z$ comme on le verra tout à l'heure.

Il faut avant tout donner un sens précis à l'opération qui consiste à faire passer une courbe continue par les points O, P'_1, P'_2, ...

3. Montrons d'abord qu'on peut trouver une valeur a_1 telle que l'ellipse

$$y = a_1\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-a_1^2}$$

permette d'obtenir un nombre de points deux fois plus grand que la première; je veux dire qu'elle fournisse les points donnés par la première, et de plus d'autres points situés chacun entre deux des premiers. Soient Q_1, Q_2, ... les points obtenus sur la seconde ellipse;

Q_1, Q_2 sont les analogues de P_1, P_2, ... on a

$$\text{ordonnée } Q_1 = a_1, \qquad \text{ordonnée } Q_2 = 2a_1\sqrt{1-a_1^2}.$$

En écrivant que les ordonnées de P_1 et Q_2 sont égales, on a une équation d'où l'on tire pour a_1

$$a_1 = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-a^2}}{2}}.$$

De ces quatre valeurs nous laisserons de côté les valeurs négatives, puisque, par convention, le paramètre qui définit l'ellipse doit être positif; pour voir laquelle des deux valeurs positives nous devons choisir, supposons a très petit. Pour qu'il y ait continuité, il faut que l'ordonnée de Q_1 soit comprise entre zéro et l'ordonnée de Q_2, c'est-à-dire

$$0 < a_1 < a.$$

Cela ne peut avoir lieu si l'on prend

$$a_1 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}},$$

car l'on aurait

$$2a_1^2 < 1 - \sqrt{1-a^2} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{1-a^2} < 2a_1^2 - 1,$$

ce qui est impossible, le premier membre de la seconde inégalité étant positif, et le second étant négatif pour peu que a soit plus petit que $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Il faut donc prendre

$$a_1 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a^2}}{2}}.$$

Montrons maintenant généralement que si le point $Q_{2\mu}$ (μ entier) de l'ellipse de paramètre a_1, a même ordonnée que le point P_μ de l'ellipse de paramètre a, les points $Q_{2\mu+2}$ de la première et $P_{\mu+1}$ de la seconde auront aussi même ordonnée. Soit y l'ordonnée de $Q_{2\mu}$

et de P_μ; on a d'une part

$$\text{ordonnée } P_{\mu+1} = a\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-a^2}$$

et remplaçant a par sa valeur $2a_1\sqrt{1-a_1^2}$

$$\text{ordonnée } P_{\mu+1} = 2a_1\sqrt{1-a_1^2}\sqrt{1-y^2} + y(1-a_1^2).$$

D'autre part soient η_1, η_2 les ordonnées de $Q_{2\mu+1}$ et $Q_{2\mu+2}$, on a

$$\eta_1 = a_1\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-a_1^2} \qquad \eta_2 = a_1\sqrt{1-\eta_1^2} - \eta_1\sqrt{1-a_1^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} 1-\eta_1^2 &= 1 - a_1^2(1-y^2) \\ &\quad - 2a_1 y_1\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-a_1^2} - y^2(1-a_1^2), \end{aligned}$$

ou

$$1-\eta_1^2 = (\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-a_1^2} - a_1 y)^2,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \eta_2 &= a_1[\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-a_1^2} - a_1 y] \\ &\quad + a_1\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-a_1^2} + y(1-a_1^2), \\ \eta_2 &= 2a_1\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-a_1^2} + y(1-2a_1^2) = \text{ordonnée } P_{\mu+1}. \end{aligned}$$

Toutes les valeurs qui représentent les ordonnées des points P, se retrouvent ainsi parmi les valeurs des ordonnées des points Q; donc si l'on fait le tracé de la *fig.* 2 en partant de l'ellipse de paramètre a_1 et en prenant pour équidistance $\frac{\delta}{2}$ au lieu de δ on obtient une suite de points parmi lesquels se trouvent les points obtenus d'abord.

On peut ensuite déterminer un nouveau paramètre a_2 par la relation

$$a_2 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_1^2}}{2}}$$

et prendre pour équidistance $\frac{\delta}{2^2}$, etc. On aurait ainsi une

suite de points de plus en plus rapprochés pour déterminer la courbe C.

Voici maintenant une remarque dont nous aurons besoin. Les quantités a, a_1, a_2, ... tendent vers zéro; l'on trouve aisément

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Soit ε la valeur de a_n; construisons une courbe telle que C en partant de l'ellipse de paramètre ε et en prenant pour équidistance $\delta = \varepsilon$. On peut prendre n assez grand pour que ε soit plus petit qu'une quantité assignée d'avance, si petite qu'elle soit; à la limite le coefficient angulaire t de la tangente à l'origine à la courbe C est égal à 1; et cette courbe C se confond avec Γ.

Enfin l'on arrive au même résultat si l'on prend pour ε une quantité infiniment petite quelconque, car l'on pourrait déterminer a de manière que a_n eût une valeur donnée.

Il résulte de là que nous pourrons, dans la suite, partir d'ellipses dont le paramètre a (tout en restant positif et plus petit que 1) peut avoir, soit une valeur quelconque, soit certaines valeurs finies, soit une valeur infiniment petite, et *les résultats obtenus dans chaque cas particulier seront applicables à tous les autres cas.*

4. Vérifions que la fonction représentée par la courbe Γ satisfait aux trois conditions imposées. Pour démontrer que l'on a (p et z étant toutefois réels)

$$\sin(p+z) = \sin p\sqrt{1-\sin^2 z} + \sin z\sqrt{1-\sin^2 p},$$

il suffit de supposer que le paramètre a de l'ellipse est égal à $\sin p$. Si l'on prend sur l'ellipse (*fig.* 1) un point dont l'abscisse soit égale à $\sin z$, son ordonnée sera

$$a\sqrt{1-\sin^2 z} + \sin z\sqrt{1-a^2} = \sin(p+z).$$

Valeur et dérivée à l'origine. — D'après la manière même dont on construit la courbe Γ, on a

$$\sin(0) = 0, \qquad \left(\frac{d\sin z}{dz}\right)_{z=0} = 1,$$

l'origine est un zéro de la fonction, et c'en est un zéro simple.

5. *Équation différentielle.* — Supposons maintenant que l'on soit parti d'une ellipse définie par une valeur très petite du paramètre a et que l'on ait pris $\delta = a$ comme équidistance dans la construction de la courbe C. Soient P_μ, $P_{\mu+1}$ deux des sommets successifs de polygone sur l'ellipse, d'ordonnées y_μ et $y_{\mu+1}$; la différence des ordonnées des deux points correspondants de la courbe Γ est $y_{\mu+1} - y_\mu$, la différence de leurs abscisses est a, la sécante a pour coefficient angulaire

$$\frac{y_{\mu+1} - y_\mu}{a};$$

mais OB étant la bissectrice de l'angle xoy, le point de l'ellipse qui a pour ordonnée $y_{\mu+1}$ a pour abscisse y_μ. Le coefficient angulaire est donc

$$\frac{a\sqrt{1 - y_\mu^2} + y_\mu\sqrt{1 - a^2} - y_\mu}{a};$$

quand a tend vers zéro, ce rapport tend vers

$$\sqrt{1 - y_\mu^2}.$$

a est à la limite l'accroissement dz de z ; si l'on remplace généralement y_μ par y, on a

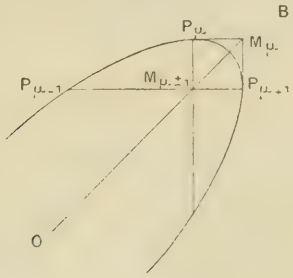
$$\frac{dy}{dz} = \sqrt{1 - y^2}.$$

Période. — On a vu, au n° 2, qu'il faut choisir parmi

deux intersections supposées distinctes de l'ellipse avec une parallèle à Oy, celle qui n'est pas symétrique du point précédent par rapport à OB. En général, les deux intersections seront distinctes; mais il est facile de voir que par continuité il y a des valeurs de a telles qu'un élément horizontal de la ligne brisée est tangent à l'ellipse et que le fait se produit dès le premier tour fait sur l'ellipse par une mobile la parcourant dans le sens ↖ et rencontrant les points P_1, P_2, ...

Soit M_μ le point où OB coupe le côté P_μ, M_μ de la ligne brisée parallèle à ox et tangent à l'ellipse (*fig.* 3).

Fig. 3.



L'ellipse admettant les deux bissectrices pour axes de symétrie, l'on a

$$\text{ordonnée } P_{\mu-1} = \text{abscisse } P_\mu = \text{ordonnée } P_{\mu+1}.$$

$M_{\mu-1}$ et $M_{\mu+1}$ sont confondus; et ainsi de suite. La ligne brisée constitue donc un polygone fermé ayant les bissectrices pour axes de symétrie et *l'on reviendra au point* P_0 *après un certain nombre (entier) d'opérations. La fonction* $\sin z$ *est donc périodique.*

Il résulte encore de cette symétrie que, si l'on désigne par $\frac{\pi}{2}$ la plus petite valeur de z pour laquelle la fonction

est maximum (égale à 1), on a

$$1^\circ \qquad \sin\pi = 0, \qquad \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \qquad \sin 2\pi = 0;$$

$$2^\circ \qquad \sin(-z) = -\sin z, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right).$$

La longueur oo' (*fig.* 2) représente la période 2π. La distance $OR = 3,14, \ldots$ représente la demi-période.

6. Nous allons voir maintenant que, quand la variable est purement imaginaire, il en est de même de la fonction. Soit j une valeur complexe de z, telle que la fonction prenne la valeur purement imaginaire $a\sqrt{-1}$, où a est réel. Si, au théorème d'addition, nous remplaçons dans le second membre a et x par $a\sqrt{-1}$, il devient

$$2a\sqrt{-1}\sqrt{1+a^2};$$

il est donc encore purement imaginaire et nous pouvons l'écrire $y\sqrt{-1}$, y étant réel; en substituant la valeur ainsi trouvée à x (ce qui est la traduction analytique du procédé géométrique du n° 2) nous aurons une nouvelle valeur encore purement imaginaire

$$a\sqrt{-1}\sqrt{1+y^2} - y\sqrt{-1}\sqrt{1+a^2}, \quad \ldots;$$

donc, pendant que la fonction prend la valeur zéro et les valeurs purement imaginaires que nous venons d'obtenir, la variable prend les valeurs o, j, $2j$, $3j$, ... Soient $u + v\sqrt{-1}$ une valeur de la variable et $U + V\sqrt{-1}$ la valeur correspondante de la fonction. Représentons sur deux axes rectangulaires ou, ov la valeur de la variable par un point d'abscisse u et d'ordonnée v, et sur deux autres axes rectangulaires OU, OV, la valeur de la fonction par un point d'abscisse U

et d'ordonnée V. D'après ce qu'on vient de voir, quand la fonction prend les valeurs qu'on vient d'obtenir et qui sont situées sur l'axe imaginaire OV, les valeurs correspondantes de la variable sont situées sur une droite du plan *uov* passant à l'origine. Comme au n° 3, on peut prendre a assez petit pour que z puisse être considéré comme le produit d'un entier assez grand μ par un nombre complexe assez petit j, d'argument constant. Alors, quand la fonction décrit l'axe OV, la variable décrit une droite passant à l'origine.

Il reste à montrer que cette droite est nécessairement l'axe *ov*, sans quoi la fonction ne serait pas analytique.

En effet, l'on sait que pour une telle fonction les relations entre u et v, représentées par les conditions

$$U = 0, \qquad V = 0,$$

sont figurées dans le plan *uov* par des courbes qui se coupent aux points racines de la fonction, et que si l'un de ces zéros est un zéro simple, les deux courbes qui y passent se coupent orthogonalement. Dans le cas que nous considérons, les deux courbes sont des droites; elles sont donc perpendiculaires : l'une étant l'axe *ou*, l'autre est l'axe *ov*.

7. *Période imaginaire.* — Dans le cas de la variable réelle, nous l'avons considérée comme le produit d'un nombre réel par un entier, μ, qui indique le nombre d'opérations par lesquelles on passe d'un point P au suivant. Ici, nous le considérons comme le produit d'un nombre imaginaire par un nombre entier *gardant la même signification concrète que tout à l'heure*. Appelons *conjuguée* d'une fonction donnée la fonction *réelle* définie par le théorème d'addition de la première après que l'on y a remplacé μ, a et x par $\mu\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$

et $x\sqrt{-1}$. Toute fonction donnée n'admet pas nécessairement une conjuguée [1]. Quand le fait se produit, la période imaginaire d'une fonction s'interprète facilement. *C'est, au facteur $\sqrt{-1}$ près, la période réelle de sa conjuguée et réciproquement.*

8. En remplaçant, dans l'équation (1), y, a et x par $y\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$ et $x\sqrt{-1}$, il vient

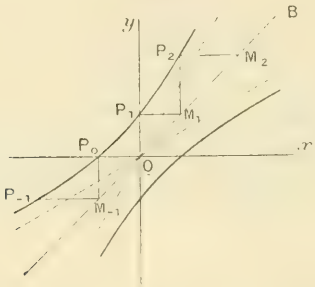
$$y\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{-1}\sqrt{1+a^2},$$

ou

$$y = a\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+a^2}. \tag{2}$$

Appliquons la même représentation géométrique qu'à l'équation (1). La courbe (2) est une hyperbole (*fig.* 4)

Fig. 4.



qui admet les bissectrices pour axes; la bissectrice positive OB étant l'axe non transverse, ses asymptotes ont des coefficients angulaires positifs qui ne sont ni nuls ni infinis.

---

[1] Telles sont, par exemple, e^z et la fonction p dont on parlera plus loin. Pour qu'il y ait une conjuguée, il faut que la fonction donnée soit réelle ou purement imaginaire en même temps que la variable.

Si l'on trace la ligne brisée $P_{-1}M_{-1}P_0OP_1M_1$ définie de la même manière que précédemment, on voit que les ordonnées des points obtenus croissent ou décroissent indéfiniment. En traçant les courbes analogues aux courbes C et Γ, on a la courbe représentant la fonction qui satisfait au théorème d'addition (2). Si l'on fait en sorte que la courbe ait pour coefficient angulaire à l'origine l'unité, elle représente la fonction désignée sous le nom de *sinus hyperbolique*. Pour $z = \pm\infty$ on a $\mathrm{Sh}(z) = \pm\infty$.

On voit que si l'on suit la ligne brisée toujours dans le même sens, on ne revient jamais au point de départ. $\mathrm{Sh}\, z$ n'a donc pas de période réelle; sa conjuguée $\sin z$ *n'a donc pas la période imaginaire*. C'est ce résultat qu'il nous importait de connaître.

9. De la définition de la fonction $\mathrm{Sh}\, z$ donnée au n° 8, il résulte qu'on a

$$\sin(z\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\mathrm{Sh}\, z.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'attacher un sens à la fonction $\sin z$ quand z prend une valeur complexe de la forme $u + v\sqrt{-1}$. En appliquant le théorème d'addition on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin(u + v\sqrt{-1}) \\ &\quad = \sin u\sqrt{1 - (\sin v\sqrt{-1})^2} + \sin(v\sqrt{-1})\sqrt{1 - \sin^2 u} \\ &\quad = \sin u\sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 v} \qquad + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sh}\, v \quad \sqrt{1 - \sin^2 u} \end{aligned}\right.$$

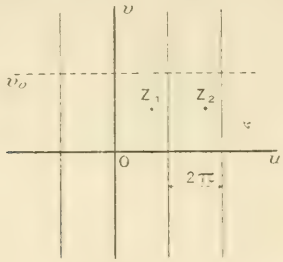
de la forme

$$U + V\sqrt{-1}.$$

Si donc l'on se donne v et que l'on fasse varier u, la fonction $\sin(u + v\sqrt{-1})$ reprend la même valeur

chaque fois que $\sin u$ reprend la même valeur, c'est-à-dire quand u varie de $2m\pi$ (m entier). Par suite, si dans le plan uov (*fig.* 5) l'on trace des parallèles à ov

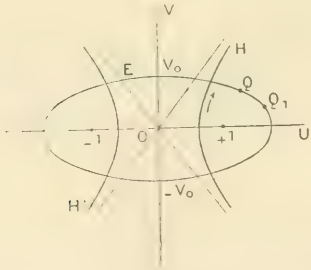
Fig. 5.



distantes de 2π, on pourra dire que, chaque fois que z prend des valeurs représentées par des points tels que Z_1, Z_2 ayant dans chaque bande des positions relatives semblables, la fonction $\sin z$ reprend la même valeur.

10. Aux n°s 1 et 8, nous avons examiné le cas où la variable est purement réelle, et celui où elle est purement imaginaire. Nous allons maintenant nous rendre compte de ce qui se passe quand z décrit une parallèle à l'axe ou. Chacune des valeurs de la fonction est représentée en coordonnées U et V (*fig.* 6) par un point

Fig. 6.



d'abscisse U et d'ordonnée V, U et V étant les fonctions

réelles définies par l'équation (3),

$$U = \sin u \sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 v}, \qquad V = \mathrm{Sh}\, v \sqrt{1 - \sin^2 u}.$$

Soit v_0 l'ordonnée de la parallèle à ou décrite par z (*fig.* 5); et soit V_0 la valeur correspondante de la fonction; quand z prend les valeurs $u + v_0\sqrt{-1}$, la fonction est

$$\sin(u + v_0\sqrt{-1}) = \sin u \sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 v_0} + \sqrt{-1}\, \mathrm{Sh}\, v_0 \sqrt{1 - \sin^2 u}.$$

Posons $\sin u = \xi$; on aura

$$U - \xi\sqrt{1 + V_0^2} = 0,$$
$$V - V_0\sqrt{1 - \xi^2} = 0.$$

En éliminant ξ entre ces deux équations, nous aurons

$$(4) \qquad \frac{U^2}{1 + V_0^2} + \frac{V^2}{V_0^2} = 1,$$

ellipse ayant pour foyers les points $U = \pm 1$ et coupant l'axe oV en $\pm V_0$; à chaque valeur de V_0 correspond une ellipse déterminée. Ces ellipses jouiront de la propriété suivante.

La valeur de la fonction est représentée par un point Q du plan UOV; z a alors dans son plan, ou plutôt dans une quelconque des bandes du plan uov, une position déterminée; quand, à partir de ce point, z décrit une parallèle à ou, la fonction décrit dans le plan UOV l'ellipse de foyer ± 1 passant par le point Q.

En appliquant la même méthode au cas où z décrit une parallèle à l'axe ov, on trouve pour représenter les variations de $\sin z$ les hyperboles (*fig.* 6)

$$\frac{U^2}{U_0^2} - \frac{V^2}{1 - U_0^2} = 1$$

homofocales aux ellipses et qui, par suite, *les coupent orthogonalement*.

11. Nous avons vu que $\sin z$ admet une période réelle et n'a pas de période imaginaire. C'est ce que montre bien la *fig.* 6; chaque fois que z varie de 2π et passe dans une autre bande au point correspondant, le mobile qui décrit l'ellipse E toujours dans le même sens revient à son point de départ.

Cela n'aurait pas lieu si le mobile tendait vers un point limite sur l'ellipse; il est facile de voir qu'il n'en peut être ainsi. Soit, en effet, Q un point quelconque de l'ellipse d'ordonnées U et V; la fonction prend la valeur

$$X = U - V\sqrt{-1}.$$

Nous calculerons les coordonnées U_1 V_1 au point Q_1 par la relation

$$X_1 = a\sqrt{1 - X_1^2} + X_1\sqrt{1 - a^2}.$$

Si le mobile tendait vers une position limite x sur l'ellipse, on aurait

$$x_1 = a\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - a^2} = x;$$

or les deux valeurs de x satisfaisant à cette équation (n° 4 et *fig.* 1) sont réelles et comprises entre -1 et $+1$. Comme aucune des ellipses (*fig.* 6) (sauf l'ellipse limite) ne coupe l'axe réel entre ces points, le mobile ne peut tendre sur aucune ellipse vers une position limite. Il ne pourrait en être ainsi que pour l'ellipse limite qui se confond avec l'axe réel; mais on a déjà examiné ce cas. Le mobile revient donc à son point de départ, les ellipses étant des courbes fermées.

Quand z varie au contraire le long d'une parallèle à oy, le mobile décrit une branche d'hyperbole dans un sens constant et l'on pourrait voir qu'il ne peut venir sur

l'autre branche en passant par l'infini; les branches d'hyperboles étant infinies, le mobile ne revient jamais à son point de départ.

12. Comme complément aux résultats du n° 10, nous énoncerons les propositions suivantes :

1° *Quand z décrit dans son plan une droite faisant un angle φ avec ou,* $\sin z$ *décrit dans son plan une courbe qui coupe toutes les ellipses de foyers* ± 1 *sous un angle constant;* et, plus généralement,

2° Quand z décrit dans son plan un chemin quelconque R, $\sin z$ décrit dans son plan un chemin S; à chaque point r de R correspond un point s de S; *l'angle que fait en s le chemin* S *avec l'ellipse de foyers* ± 1 *qui passe en ce point est égal à l'angle que fait le chemin* R *avec une parallèle à ou menée par r.*

La méthode étant maintenant exposée pour le cas de $\sin z$, nous examinerons les autres fonctions plus rapidement; nous montrerons principalement comment se transforment les résultats qu'on vient d'obtenir.

II. — Tangente hyperbolique.

13. Considérons maintenant une fonction, que nous appellerons *tangente hyperbolique*, satisfaisant aux conditions

$$\mathrm{Th}(p+q) = \frac{\mathrm{Th}\,p + \mathrm{Th}\,q}{1 + \mathrm{Th}\,p \,.\, \mathrm{Th}\,q},$$

$$\mathrm{Th}(0) = 0, \qquad \left(\frac{d\,\mathrm{Th}\,p}{dp}\right)_{p=0} = 1.$$

Posons $\mathrm{Th}\,p = a$, $\mathrm{Th}\,q = x$, $\mathrm{Th}(p+q) = y$; la courbe

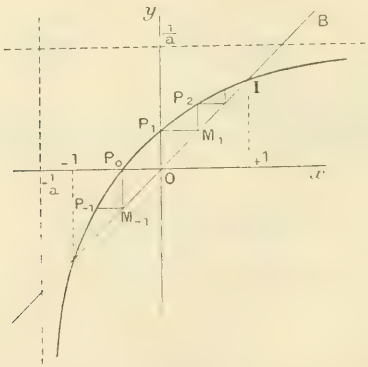
$$y = \frac{a+x}{1+ax},$$

où a est supposé plus petit que 1, est une hyperbole équilatère (*fig.* 7) qui admet pour asymptotes les droites

$$x = -\frac{1}{a}, \qquad y = \frac{1}{a},$$

Elle coupe la bissectrice OB aux points dont les abscisses sont ± 1. Au point I la tangente à l'hyperbole a pour coefficient angulaire une quantité positive plus petite que 1, tant que a est, comme nous l'avons supposé, plus petit que 1. En s'appuyant sur cette remarque on démontrerait aisément que le chemin $P_0 O P_1 M_1 P_2 \ldots$ s'approche indéfiniment du point I. Si donc nous traçons comme au n° 2 des courbes analogues à C et à Γ (cette dernière ayant l'unité pour coefficient angulaire à l'origine), la courbe Γ qui représentera Th z sera formée d'une branche infinie dans les deux sens, asymptote à la droite $y = 1$ pour $z = +\infty$ et à la droite $y = -1$ pour $z = -\infty$ et dont toutes les ordonnées seront plus petites que 1 en grandeur absolue. La *fig.* 7 montre que, si l'on parcourt

Fig. 7.



la ligne brisée toujours dans le même sens, on ne revient jamais au point de départ. *La fonction* Th z *n'a donc*

pas de période réelle. Par la méthode du n° 4, on verra que la fonction Th z satisfait à l'équation

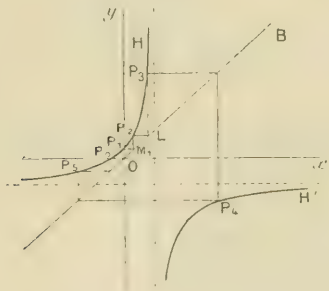
$$\frac{dy}{dz} = 1 - y^2.$$

14. Considérons maintenant la fonction conjuguée que nous appellerons tang z; son théorème d'addition est représenté par l'équation

$$y = \frac{a + x}{1 - ax}.$$

C'est une hyperbole équilatère (*fig.* 8) qui admet

Fig. 8.



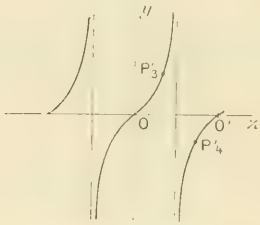
pour asymptotes les droites

$$x = \frac{1}{a}, \qquad y = -\frac{1}{a}.$$

En suivant le chemin $P_0 O P_1 M_1 \ldots$ on remarque une circonstance nouvelle : les ordonnées des points P_1, P_2, ... croissent d'abord, puis tout d'un coup un point (P_n sur la figure) prend une ordonnée négative inférieure à $-\frac{1}{a}$, puis le suivant a une ordonnée plus grande que

$-\frac{1}{a}$; enfin, après un certain nombre d'opérations on se trouve ramené dans la région de la courbe où se trouvent les points $P_0, P_1, \ldots$; cela montre tout d'abord que tang z *est périodique et qu'elle a une période réelle.* Si l'on trace les courbes analogues à C et à Γ (cette dernière satisfaisant toujours à la même condition, en ce qui regarde le coefficient angulaire à l'origine), la *fig.* 9 obtenue ainsi représente la fonction tang z. Par la

Fig. 9.



méthode du n° 4 on verra qu'elle satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dz} = 1 + y^2.$$

15. Voyons maintenant ce qui se passe entre les points P_3 et P_n de la figure; *la fonction* tang z *passe par* $\pm\infty$. En effet, remarquons comme pour sin z que les fonctions tang z auxquelles ont est amené pour des valeurs différentes de a sont identiques. Nous pourrons donc raisonner en attribuant à a une valeur quelconque. Prenons a tel que parmi les points $P_1, P_2, \ldots$ il y en ait un, P_μ, par exemple, dont l'ordonnée soit égale à celle du point L, intersection de la bissectrice OB avec l'asymptote parallèle à Oy (*fig.* 8); en donnant à M_μ le même sens qu'au n° 2, M_μ se confondra avec L;

pour obtenir le point suivant $P_{\mu+1}$ nous menons par M_μ la parallèle à Oy. Cette parallèle est l'asymptote elle-même; elle rencontre la courbe à $\pm\infty$; on peut donc indifféremment prendre $P_{\mu+1} = \pm\infty$, puisque les deux points ainsi définis *ne sont ni l'un ni l'autre symétriques de* P_μ *par rapport à* OB; tang z passe donc pour certaines valeurs de z du positif au négatif en devenant infinie. C'est ce qui nous explique pourquoi, sur la *fig.* 8, les points P_3 et P_n ont des ordonnées de signes contraires et très différentes même si a est très petit. Enfin il est facile de voir que, quel que soit le point $P_{\mu+1}$ qu'on a choisi, on retrouve pour ordonnées de $P_{\mu+2}$ et des suivants les mêmes valeurs. Si l'on prend $P_{\mu+1} = +\infty$, la parallèle à Ox menée par ce point coupe OB en un point $M_{\mu+1}$ de coordonnées $x = +\infty$, $y = +\infty$; la parallèle à Oy menée par $M_{\mu+1}$ rencontre l'hyperbole (branche H') en un point $P_{\mu+2}$ de coordonnées $x = +\infty$, $y = 0$.

Si l'on prend $P_{\mu+1} = -\infty$, on trouve pour $M_{\mu+1}$ les coordonnées $x = -\infty$, $y = -\infty$, et pour $P_{\mu+2}$ les coordonnées $x = -\infty$, $y = 0$; on voit donc que dans les deux cas l'ordonnée de $P_{\mu+2}$ est nulle. Il en résulte que $P_{\mu+3}$, $P_{\mu+n}$ *sont des points à détermination unique.*

(*A suivre*) [1].

---

[1] A titre *tout à fait exceptionnel*, nous avons, à cause de son intérêt, accepté cet article, bien que son étendue nous empêche de le publier en entier dans un seul numéro.

(*Note de la Rédaction.*)

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1899. — COMPOSITIONS.

Lille.

Calcul différentiel et intégral.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{3(1+x)}{x} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{6}{x} \cdot \frac{dy}{dx} - 4y = 0.$$

Cette équation peut être ramenée à une équation linéaire à coefficients constants par une substitution de la forme $y = \frac{v}{u}$, v *désignant la nouvelle fonction et* u *un polynome entier en* x *convenablement choisi.*

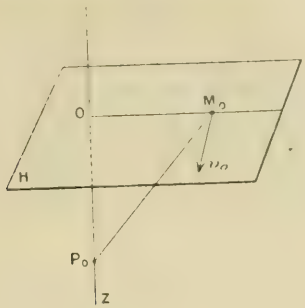
Déterminer ce polynome u *et intégrer complètement l'équation proposée.*

Mécanique rationnelle.

Étudier le mouvement de deux points matériels pesants de masses égales, assujettis à se mouvoir sans frottement, l'un P, *sur une verticale* OZ, *l'autre* M, *sur un plan horizontal* H, *et reliés par un fil flexible, inextensible et sans masse.*

A l'origine du mouvement, le point P *est au-dessous du plan horizontal, en* P_0, *à une distance de ce plan*

$OP_0 = h_0$; *le fil est tendu; la vitesse initiale* v_0 *du point* M, *qui est alors en* M_0, *est perpendiculaire à* OM_0



et a pour valeur $\sqrt{2gh_0}$, g *désignant l'accélération due à la pesanteur.*

Mécanique appliquée.

Épreuve théorique. — I. *Diagramme entropique. Théorème sur le coefficient économique maximum.*

II. *Une poutre droite, de longueur* $4l$, *reposant sur deux appuis de niveau, supporte une charge uniformément répartie* p *par unité de longueur et une charge isolée* $4pl$ *appliquée au quart de sa longueur. Déterminer le moment fléchissant maximum et la flèche.*

Épreuve pratique. — *On donne les principales dimensions d'une distribution à tiroirs superposés système Meyer.*

1° *Dessiner une coupe longitudinale et indiquer brièvement le fonctionnement de cette distribution;*

2° *Déterminer, à l'aide de l'épure de Zenner, les écartements des tasseaux correspondants à divers indices de détente donnés. (Négliger l'obliquité des bielles.)*

Lyon.

Analyse.

I. *Les trois coordonnées rectangulaires d'un point sur une courbe* C *étant exprimées en fonction de l'arc, trouver l'enveloppe du plan rectifiant* P (*plan perpendiculaire en chaque point à la normale principale*). *Quelle doit être* C *pour que cette enveloppe soit un cylindre?*

Les cosinus directeurs de la normale principale sont

$$x'', \quad y'', \quad z'', \qquad x'' = \frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \ldots$$

L'équation de P, en coordonnées courantes u, v, w, est

$$x''(u - x) + y''(v - y) + z''(w - z) = 0.$$

L'enveloppe s'obtient par les procédés habituels. Si cette enveloppe est un cylindre dont l'axe a A, B, C pour cosinus directeurs, on a

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

d'où

$$Ax + By + Cz = as + b$$

(a et b = const. arbitr.).

La tangente à la courbe C fait un angle constant avec l'axe du cylindre, etc.

II. *Intégrer l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre*

$$\Delta(y) = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = \Delta(u),$$

où u est une fonction connue de x.

$\Delta(y)$ ne change pas quand on change successivement y en $y + A$, By, y^{-1} (A, B = const. arbitr.), et enfin en

$$\frac{ay+b}{cy+d} \qquad (ad - bc = 1)$$

(a, b, c, d = const. arbitr.). D'autre part, u est intégrale et aussi (en vertu de ce qui vient d'être dit) $\frac{au+b}{cu+d}$, expression à trois paramètres. L'intégrale générale est donc

$$y = \frac{au+b}{cu+d},$$

où a, b, c, d sont quatre constantes arbitraires assujetties à $ad - bc = 1$.

III. *On envisage la fonction algébrique u de la variable complexe z, définie par l'équation $u^2 + z^5 = 1$. On prendra la détermination $u = +1$ pour $z = 0$.*

z, partant de l'origine des coordonnées, y revient après avoir parcouru divers circuits fermés Γ. Distinguer parmi les Γ ceux qui ramènent et ceux qui ne ramènent pas la détermination initiale $u = +1$.

Même question pour la fonction algébrique z de u, définie par la même équation. La détermination initiale est $z = +1$ pour $u = 0$.

Quelles sont les valeurs diverses de l'intégrale

$$I = \int_0^x \frac{dz}{u} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} u = \sqrt{1 - z^5} & \\ u = +1 & \textit{pour } z = 0 \end{array} \right\}?$$

Les deux déterminations de u s'échangent quand z tourne autour d'un des cinq points θ^i, ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), θ étant une racine primitive cinquième de l'unité, et autour du point ∞.

Les cinq déterminations de z s'échangent circulaire-

ment quand u tourne autour d'un des trois points $+1$, -1, ∞.

La discussion s'achève sans difficulté.

Mécanique.

Un point M *matériel de masse m se meut sans frottement sur un cône de révolution* S, *à axe vertical; l'angle au sommet est* $2\alpha\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. S *est limité à sa nappe supérieure.*

M *est attiré vers l'axe de* S *par une force perpendiculaire à cet axe; l'intensité de l'attraction est*

$$K^2 mr,$$

où r est la distance de M *à l'axe et* K *un coefficient numérique.*

Trouver le mouvement, sachant que la vitesse initiale est tangente au parallèle de départ.

Calculer, en fonction des coordonnées de M, *la réaction normale du cône. Cette réaction peut-elle s'annuler?*

Théorèmes des aires et des forces vives. Coordonnées semi-polaires.

Mathématiques préparatoires.

Géométrie analytique. — *On a, en coordonnées rectangulaires, la conique* C, $4xy + 4y = 1$.

Montrer que C *est une hyperbole équilatère.*

Construire le centre, les axes (distinguer l'axe transverse), les asymptotes.

Calculer, en faisant usage des invariants, les carrés

des demi-longueurs d'axes; construire les foyers et les directrices.

Analyse. — *Trouver la courbe plane telle que le rapport entre l'ordonnée à l'origine de la tangente et l'abscisse à l'origine de la normale soit constant.*

Épreuve pratique. — *Soit la série* U *dont le terme général*

$$u_n = \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Montrer qu'en prenant seulement n termes on commet une erreur moindre que

$$\frac{1}{1-x^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Calculer, au moyen de cette remarque, avec sept décimales exactes, la valeur de la série pour $x = \frac{1}{10}$.

L'erreur commise est, pour $x > 0$,

$$E\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

où

$$E = 1 - x^2\,\frac{2n+1}{2n+3} + x^4\,\frac{2n+1}{2n+5} - \ldots,$$

$$E < 1 + x^2 + x^4 + \ldots,$$

$$E < \frac{1}{1-x^2}.$$

C. Q. F. D.

Mathématiques supérieures.

Épreuve pratique. — *Calculer, à un dix-millième près, les racines de l'équation algébrique du quatrième degré*

$$2x^4 - 7x^3 - 9x^2 + 95x - 119 = 0.$$

Analyse. — *On a l'équation aux dérivées partielles*

$$q + W(x, y, z, p) = 0; \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

I. *Soient* P *et* P′ *deux plans fixes quelconques. Considérons comme correspondants deux éléments linéaires situés à l'intersection respectivement de* P *et* P′ *avec une même* variété *ou* bande *caractéristique et appartenant aux plans* P *et* P′ *respectivement. Montrer que la correspondance définit une transformation* E *de contact.*

II. *Quand* P *et* P′ *sont tous deux parallèles au plan des* xz *et infiniment voisins l'un avec l'autre,* E *devient une transformation infinitésimale* ε *de contact.*

Montrer que la fonction caractéristique de ε *est précisément* W, *où* y *est traité comme un paramètre.*

III. *On supposera les coordonnées rectangulaires et*

$$W = A(y) + pB(y) + (x + pz)C(y) + D(y)\sqrt{1 + p^2}.$$

Montrer qu'il existe ∞^3 *surfaces intégrales coupées suivant des cercles par tous les plans parallèles à celui des* xz. *Construire ces surfaces et achever l'intégration.*

On se bornera à intégrer l'équation

$$(1) \qquad q + A + pB + C(x + pz) + D\sqrt{1 + p^2} = 0;$$

le reste résulte immédiatement de théories connues, exposées au Cours.

D'abord simplifions (1).

Posons $\eta = \int C(y)\,dy$. Alors

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dy} = C\frac{\partial z}{\partial \eta};$$

on divisera le premier membre de (1) par C sans en changer la forme. Cela revient à faire simplement $C(y) = 1$.

Posons ensuite

$$x = X + \xi(y), \qquad z = Z + \zeta(y),$$

il viendra

$$dz = p\,dx + q\,dy = dZ + \zeta'\,dy = P\,dX + (Q + \zeta')\,dy$$
$$= p\,dX + p\xi'\,dy + q\,dy;$$

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X}, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial y};$$

$$p = P, \qquad q = Q + \zeta' - P\xi';$$

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{dy}, \qquad \ldots.$$

(1) devient

$$Q + \mathcal{A} - P\mathcal{B} + X - PZ + D\sqrt{1 - P^2} = 0,$$
$$\mathcal{A} = \zeta' + \xi + A, \qquad \mathcal{B} = -\xi' + \zeta + B.$$

Déterminons ξ et ζ par les conditions

$$\zeta' + \xi + A = 0, \qquad \xi' - \zeta + B = 0,$$

c'est-à-dire

$$\xi'' + \xi + A - B' = \zeta'' + \zeta + A' + B = 0.$$

On n'a qu'à intégrer deux équations différentielles ordinaires du second ordre qui, rendues homogènes, sont à coefficients constants. Alors $A = B = 0$. Cela revient à faire $A = B = 0$ dans l'équation (1).

La double simplification $C = 1$ et $A = B = 0$ a pour propriété que les cercles, dont le plan est parallèle à celui des xz, se maintiennent tels.

On a à intégrer simplement, puisque $C = 1$, $A = B = 0$,

$$(2) \qquad q + x + pz + R(y)\sqrt{1 + p^2} = 0.$$

La surface S

$$(x + uv + \ldots z + \ldots)^2 = \rho^2$$

(où u, v, ρ sont fonctions du seul y) est coupée suivant un cercle par tout plan parallèle à celui des xz. Exprimons que S est une surface intégrale

$$(x+u)+p(z+v)=0,$$
$$u'(x+u)+(z+v)(q+v')=\rho\rho',$$
$$p=-\frac{x+u}{z+v},\qquad q=-v'+\frac{\rho\rho'-u'(x+u)}{z+v}.$$

Portons ces valeurs dans (2). Tout calcul fait, il viendra

$$x(u'-v)+z(v'+u)+uu'+vv'-\rho\rho'-R\rho=0.$$

De là successivement

$$\begin{cases} u'-v, \quad v'=u, \quad \rho'=-R; \\ u''+u=v''+v=\rho'-R=0; \\ u=\lambda\sin(y+\mu), \quad v=\lambda\cos(y+\mu), \quad \rho=\varpi-\int R\,dy. \end{cases}$$

Il y a trois paramètres arbitraires λ, μ et ϖ et ∞^3 surfaces S.

Chaque S est engendrée par une circonférence de rayon variable dont le plan reste parallèle à celui des xz et dont le centre décrit une hélice tracée sur un cylindre de révolution autour de l'axe des y.

Possédant une intégrale complète, on achèvera la solution par les procédés ordinaires.

La simplification $C=1$, $A=B=0$, n'est pas indispensable. Elle a été introduite pour faciliter la discussion géométrique, beaucoup plus rapide sur (2) que sur (1).

Cette discussion est intéressante. Par exemple, le *groupe fini continu* engendré par la transformation infinitésimale ε, considérée dans l'énoncé, représente le mouvement suivant : tout point du plan $y=$ const. est invariablement lié à une tangente à la circonférence

$$x^2+z^2=R^2.$$

tandis que cette tangente roule sans glissement sur la circonférence.

Nous engageons le lecteur à achever l'étude géométrique des surfaces intégrales et des courbes caractéristiques.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1900.

Composition de Mathématiques spéciales.

On considère les paraboloïdes H représentés, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$\frac{y^2}{p+\lambda} - \frac{z^2}{q+\lambda} - 2x - \lambda = 0,$$

dans laquelle p et q sont des constantes et λ un paramètre variable, et l'on propose d'étudier la surface Σ enveloppe des plans polaires P, par rapport au paraboloïde H, d'un point *donné* A :

1° La surface Σ est de la troisième classe et chaque plan polaire touche cette surface en tous les points d'une droite G.

2° Les droites G sont tangentes à une courbe gauche Γ du troisième ordre; elles admettent un cône directeur C du second degré.

3° La section de la surface Σ par un plan tangent, c'est-à-dire par un plan polaire P, se compose d'une droite G et d'une conique. Déduire de là le degré de la surface Σ.

4° Chaque droite G est le lieu des pôles d'un plan Q par rapport aux paraboloïdes H. Chaque plan Q est perpendiculaire à la droite G à laquelle il correspond.

5° Trouver l'enveloppe C_1 des plans Q qui correspondent aux diverses droites G.

On indiquera les relations qui lient l'enveloppe C_1 avec les paraboloïdes H et le cône C.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1900.

Mathématiques.

I. Dans le plan (P) d'une section plane d'une surface (E) pour trouver les normales à la section issues d'un point O, on peut employer la méthode suivante : couper (E) par une sphère (S), et déterminer le rayon r de la sphère de façon que le plan (P) soit tangent au cône (C) qui a pour sommet le point O et pour directrice l'intersection (E, S). La génératrice de contact OG est normale à la section plane au point G où elle rencontre la directrice (E, S) du cône (C).

Justifier cette méthode.

II. *Première application.* — On coupe l'ellipsoïde (E)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

par le plan (P)

$$ux + vy + wz = 0.$$

Sur le diamètre perpendiculaire, on porte, à partir du centre, une longueur OM dont le carré soit moyenne harmonique entre les carrés des demi-axes α et β de la section

$$\frac{2}{\overline{OM}^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}.$$

Lieu du point M, quand (P) pivote autour du point O.

III. *Deuxième application.* — Même problème en remplaçant la longueur OM par la longueur ON déduite de la formule

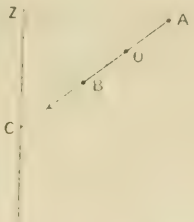
$$\frac{1}{ON} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

Étudier la forme du lieu du point N, et celle des sections parallèles aux trois plans des coordonnées.

On conservera les notations indiquées.

Épure.

Autour d'un axe vertical Z tourne un disque circulaire de $0^m,09$ de diamètre, et dont la position initiale AOB est définie ainsi : son centre O est dans le plan de front de l'axe Z, à $0^m,09$



à droite de cet axe ; son plan, perpendiculaire au plan de front, est incliné à 45° sur Z, et de façon à couper Z en un point C situé au-dessous du point O.

Du solide annulaire engendré par le disque, on élève la partie intérieure à l'hyperboloïde de révolution qui a pour génératrice le diamètre de front AB du disque, et pour axe la verticale du point le plus en avant du disque.

Le solide restant repose sur un sol horizontal par son parallèle inférieur.

Le représenter par ses deux projections, avec les ombres qu'il détermine sur lui-même et sur le sol, quand on l'éclaire par des rayons parallèles dont la direction et le sens sont ceux de la flèche OC, après une rotation de 45° dans le sens des aiguilles d'une montre autour de Z.

On placera les projections de Z sur l'axe de la feuille parallèle aux grands côtés, sa projection horizontale à $0^m,15$ au-dessus du bord inférieur ; la projection verticale du point O à $0^m,34$ au-dessus du même bord.

On indiquera en traits pleins rouges les constructions nécessaires pour déterminer les points remarquables de l'épure. On ne tracera que les parties vues des courbes d'ombres.

QUESTIONS.

1852. On considère un système articulé composé de sept tiges rigides dont les quatre premières forment un quadrilatère gauche ABCD; les trois autres ME, MF, MG relient un point M à trois points E, F, G, appartenant respectivement aux tiges AB, BC, CD et fixes sur ces tiges.

Les articulations qui existent aux points A, B, C, D, E, F, G, M sont réalisées par des joints de Cardan.

Démontrer que, pendant toutes les déformations dont le système est susceptible, le point M reste à distance invariable d'un certain point de la tige DA, fixe sur cette tige. On peut, de la sorte, adjoindre au système une huitième tige sans introduire de liaison nouvelle.

(RAOUL BRICARD.)

1853. On considère la surface engendrée par un cercle de grandeur invariable qui se déplace suivant une loi quelconque; montrer que les normales à cette surface, menées aux points qui appartiennent au cercle mobile dans l'une de ses positions, s'appuient sur deux droites.

(RAOUL BRICARD.)

1854. 1° Étant placés les trois sommets A, B, C d'un triangle, les trois centres de ses cercles de Neuberg et les trois centres de ses cercles de Mackay, tracer par points, et au moyen de la règle seulement, l'*hyperbole* de Kiépert du triangle;

2° Étant placés les trois côtés a, b, c d'un triangle et les polaires du barycentre par rapport aux six coniques corrélatives des cercles de Neuberg et de Mackay, le barycentree étant origine de la corrélation, tracer par tangentes, et au moyen de la règle seulement, la *parabole* de Kiépert du triangle.

(L. RIPERT.)

[F8f] [H11d]

EXPOSITION GÉOMÉTRIQUE ÉLÉMENTAIRE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE (suite) [1];

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

16. Si nous appelons *période* la plus petite quantité dont doit varier z pour que la fonction reprenne la même valeur, quelle que soit cette valeur, notre représentation géométrique nous la donne et l'on trouve que la distance oo' est égale à 1, 5, ... On pourrait démontrer que la période de la fonction tang z est précisément la moitié de la période de la fonction sin z.

On voit encore que tang z s'annule une fois et devient $\pm\infty$ dans l'intervalle d'une période.

De l'existence de la période réelle de la fonction tang z on *conclut l'existence de la période* $\pi\sqrt{-1}$ *pour la fonction* Th z; c'est le résultat auquel nous voulions arriver.

17. On appliquera aisément au cas de Th z les raisonnements du n° 10.

On trouve alors que, lorsque z décrit une parallèle à l'axe réel *ou* Th z décrit l'un des cercles

$$\frac{U^2+V^2-1}{V}=\frac{V_0^2+1}{V_0}$$

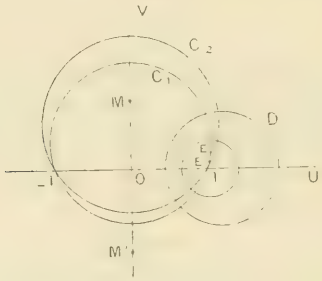
[1] *Voir* page 255.

qui passent tous par les points $U = \pm 1$ (*fig.* 10) tels que C_1, C_2. Quand z décrit une parallèle à l'axe imaginaire ov, $\operatorname{Th} z$ décrit un des cercles

$$\frac{U^2 + V^2 + 1}{U} = \frac{U_0^2 + 1}{U_0}$$

tels que D; ces cercles coupent orthogonalement les premiers et n'ont entre eux aucun point commun; ici donc,

Fig. 10.



à part les cercles limites qui se confondent avec les axes, les deux systèmes de courbes sont formés de courbes fermées; il ne faudrait pas en conclure que $\operatorname{Th} z$ admet une période réelle et une période imaginaire. Elle admet une période imaginaire; car, lorsque z décrit une parallèle à l'axe imaginaire, le mobile qui figure $\operatorname{Th} z$ décrit dans un sens constant un cercle tel que D sans tendre vers une position limite sur ce cercle; on le verrait comme au n° 10 en remarquant que l'équation

$$x = \frac{a + x}{1 - ax}$$

a pour racines

$$x = \pm \sqrt{-1},$$

et qu'aucun des cercles D (sauf les cercles limites) ne passe en ces points. Au contraire, quand z décrit une

parallèle à l'axe réel ou, le mobile décrit dans son plan un cercle tel que C_1 et suivant le sens du mouvement; il s'approche de l'un des points $= 1$ de l'axe réel. Mais nous allons voir qu'il s'en approche *asymptotiquement*. Soit, en effet, E un point du cercle C_1 de coordonnées U, V; la fonction a la valeur

$$X = U + V\sqrt{-1};$$

on a un autre point E_1 correspondant à la valeur $X_1 = U_1 + V_1\sqrt{-1}$ de la fonction en écrivant

$$X_1 = \frac{a + X}{1 + aX},$$

c'est-à-dire

$$U_1 + V_1\sqrt{-1} = \frac{a + U + V\sqrt{-1}}{1 + a(U + V\sqrt{-1})}.$$

Si, par exemple, V est positif, V_1 sera aussi positif. Pour le prouver il suffit de montrer que l'argument du numérateur est plus grand que celui du dénominateur. Désignons respectivement ces arguments par φ et ψ. On a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{V}{a + U}, \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{aV}{1 + aU}.$$

Si U est positif (c'est le cas du point E), les deux tangentes sont positives et les arcs étant plus petits que $\frac{\pi}{2}$ sont positifs. On a

$$\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\psi = \frac{V(1 - a^2)}{(a + U)(1 + aU)}.$$

$1 - a^2$ est positif puisque a est plus petit que 1; donc $\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\psi$ est positif; il en est de même de $\varphi - \psi$; E_1 est donc du même côté que E par rapport à l'axe OU; donc le mobile s'approche asymptotiquement soit du point $+1$, soit du point -1; et il ne revient jamais à

son point de départ. Th z *n'a donc pas la période réelle.*

Th z ayant seulement une période imaginaire, le plan uov des z est partagé en bandes par des parallèles à l'axe ou au lieu de parallèles à l'axe ov comme dans le cas de $\sin z$.

Les énoncés du n° 12 sont applicables en remplaçant les ellipses par les cercles qui passent aux points ± 1.

III. — La fonction sn.

18. Considérons maintenant une fonction, que nous désignerons par sn, admettant le théorème d'addition

$$\operatorname{sn}(p+q) = \frac{\operatorname{sn} p\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 q}\,\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 q} + \operatorname{sn} q\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 p}\,\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 p}}{1-k^2\operatorname{sn}^2 p\operatorname{sn}^2 q},$$

dans laquelle k désigne un nombre positif plus petit que 1, et satisfaisant aux conditions

$$\operatorname{sn}(0) = 0, \qquad \left(\frac{d\operatorname{sn} p}{dp}\right)_{p=0} = 1.$$

Posons

$$\operatorname{sn}(p+q) = y, \qquad \operatorname{sn} p = a, \qquad \operatorname{sn} p = x;$$

on a

$$(5) \qquad y = \frac{a\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2} + x\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-k^2a^2}}{1-k^2a^2x^2}.$$

Dans cette relation a désignera un nombre positif plus petit que 1.

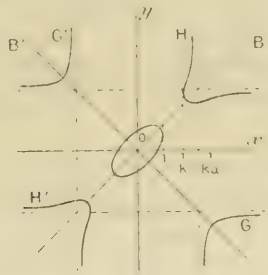
La courbe (5) se compose, comme on le verrait aisément :

1° D'un ovale inscrit dans le carré de côtés $x = \pm 1$, $y = \pm 1$;

2° De deux branches infinies HH′ asymptotes aux

droites $y = \pm \frac{1}{ka}$, et disposées comme l'indique la *fig.* 11; elles ont une tangente verticale d'abscisse $\pm \frac{1}{k}$

Fig. 11.



et une tangente horizontale de même ordonnée;

3° De deux autres branches infinies GG' ayant les mêmes asymptotes, mais situées de l'autre côté de ces asymptotes.

Les bissectrices OB, OB' sont les axes de symétrie de la courbe.

19. Considérons plus particulièrement l'ovale central; la *fig.* 1 pourra nous servir. Partons encore du point P_0 et décrivons le chemin $P_0 O P_1 M \ldots$, en ayant toujours soin de ne prendre parmi les deux intersections d'une verticale à l'ovale, quand elles sont distinctes, que celle qui n'est pas symétrique du point précédemment obtenu. Je dis que l'on a

$$\text{ordonnée de } P_0 = \operatorname{sn}(2p).$$

En effet, P_1 correspond à $\operatorname{sn} q = x = 0$; on a donc, d'après (5),

$$\text{ordonnée de } P_1 = a = \operatorname{sn} p.$$

En remarquant que l'abscisse de P_2 est égale à l'or-

donnée de P_1, puisque M_1 est sur la bissectrice OB, on aura l'ordonnée de P_2 en remplaçant dans (5) x par l'ordonnée de P_1, c'est-à-dire par a, on a donc

$$\text{ordonnée de } P_2 = \frac{2a\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-k^2a^2}}{1-k^2a^4} = \operatorname{sn}(2p);$$

on verra ensuite que la loi est générale, en la supposant vraie, pour le point P_μ et en passant au point $P_{\mu+1}$.

20. Par la méthode du n° 2 nous obtiendrons, au moyen de l'ovale central, une courbe Γ qui représentera la fonction $\operatorname{sn} z$ et, comme au n° 4, nous vérifierons qu'elle satisfait au théorème d'addition et aux conditions $\operatorname{sn}(0) = 0$, $\left(\frac{d\operatorname{sn} z}{dz}\right)_{z=0} = 1$. Comme $\sin z$, $\operatorname{sn} z$ a pour coefficient angulaire à l'origine l'unité, et oscille entre -1 et $+1$, sa courbe figurative a ainsi une forme analogue; mais la période est plus grande; quand k^2 tend vers 1, cette période devient de plus en plus grande; pour $k^2 = 1$ la fonction devient $\operatorname{Th} z$.

21. *Équation différentielle.* — Deux points successifs P_μ, $P_{\mu+1}$ de l'ovale et, par suite, deux points successifs P'_μ, $P'_{\mu+1}$ de la courbe Γ ont pour ordonnées y_μ, $y_{\mu+1}$. Comme l'abscisse du point $P_{\mu+1}$, d'ordonnée $y_{\mu+1}$, est précisément égale à y_μ, on aura

$$y_{\mu+1} - y_\mu = \frac{a\sqrt{1-y_\mu^2}\sqrt{1-k^2y_\mu^2} + y_\mu\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-k^2a^2}}{1-k^2a^2y_\mu^2} - y_\mu.$$

En divisant cette différence par a on aura le coefficient angulaire de la sécante qui joint les deux points. En faisant tendre a vers 0 et en prenant la limite du rapport, il vient

$$\frac{dy}{dz} = \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}.$$

22. Les conclusions de la fin du n° 5 s'appuient sur ce fait que l'ellipse n'est rencontrée qu'en deux points par une parallèle à oy, admet pour axes de symétrie les deux bissectrices, et est une courbe fermée et sans point double. L'ovale que nous considérons ayant les mêmes propriétés, les résultats de la fin du n° 5 s'appliquent à $\operatorname{sn} z$; disons seulement que la quantité analogue à π est notée d'ordinaire 2Ω et représente la demi-période.

23. *Période imaginaire.* — Pour voir si $\operatorname{sn} z$ admet une période imaginaire, nous considérerons la fonction conjuguée et nous chercherons si cette dernière admet une période réelle. En changeant a, x et y en $a\sqrt{-1}$, $x\sqrt{-1}$, $y\sqrt{-1}$, l'équation (5) devient

$$y\sqrt{-1} = \frac{a\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+k^2x^2} + x\sqrt{-1}\sqrt{1+a^2}\sqrt{1-k^2a^2}}{1-k^2a^2x^2}$$

ou bien

$$(6) \quad y = \frac{a\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-k^2x^2} + x\sqrt{1-a^2}\sqrt{1+k^2a^2}}{1-k^2a^2x^2}.$$

Telle est la formule d'addition de la fonction conjuguée.

La courbe (6) se compose :

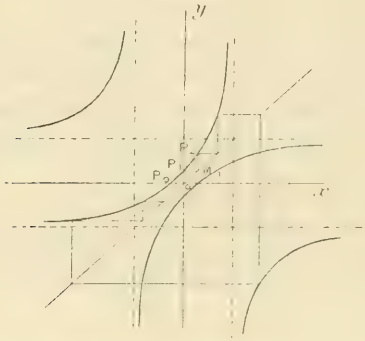
1° De deux branches HH′ (*fig.* 12) ayant pour asymptotes les droites $x = \pm\frac{1}{ka}$, $y = \pm\frac{1}{ka}$;

2° De deux branches infinies GG′ ayant les mêmes asymptotes et situées de l'autre côté de ces asymptotes. Ces quatre branches sont disposées comme l'indique la *fig.* 12. Les bissectrices de l'angle xoy sont axes de symétrie de la courbe.

En parcourant la ligne brisée $P_0OP_1M_1P_2\ldots$ toujours en faisant attention de choisir, de deux intersec-

tions d'une verticale avec la courbe, celle qui n'est pas symétrique du point précédemment obtenu, on pourra représenter la fonction conjuguée; le même fait qu'au n° 14 se présente ici; il y a une valeur de z pour laquelle la fonction devient $\pm\infty$, après quoi on est ramené dans la région de la courbe d'où l'on était parti; *la fonction conjuguée est périodique;* sa courbe figurative

Fig. 12.

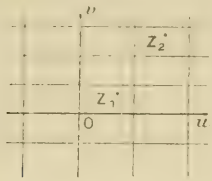


a une forme analogue à celle de tang z; mais la période est plus grande et d'autant plus que k^2 est plus voisin de 0; pour $k^2 = 0$ la période est infinie; la fonction se confond alors avec Sh z. La fonction conjuguée de sn ayant une période réelle $2\Omega_1$, sn z *admet la période imaginaire* $2\Omega_1\sqrt{-1}$.

24. *Rectangle des périodes.* — Comme sin z, sn z admet une période réelle; le plan de z est partagé d'abord, comme sur la *fig.* 5, en bandes parallèles à l'axe imaginaire; comme Th z, sn z admet une période imaginaire, le plan des z est aussi partagé comme sur la *fig.* 10 en bandes parallèles à l'axe réel; ici donc le plan est partagé en rectangles (*fig.* 13), de côtés $2\Omega_1$ et $4\Omega_2$, et quand z prend des valeurs représentées par des

points tels que Z_1, Z_2 occupant dans deux rectangles quelconques des positions relatives semblables, $\operatorname{sn} z$ reprend la même valeur; $\operatorname{sn} z$ *est doublement périodique.*

Fig. 13.



Dans chaque rectangle elle s'annule deux fois et devient infinie deux fois.

25. *Variations de* $\operatorname{sn} z$. — Pour trouver, comme aux n°s 10 et 17, le lieu des points représentatifs de $\operatorname{sn} z$ quand z décrit dans un des rectangles de son plan une parallèle à l'axe ou, nous écrirons

$$\operatorname{sn}(u + v_0\sqrt{-1})$$
$$= \frac{\operatorname{sn} u\sqrt{1 + \operatorname{Sn}^2 v_0}\sqrt{1 - k^2\operatorname{Sn}^2 v_0} - \sqrt{-1}\operatorname{Sn} v_0\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}\sqrt{1 - k^2\operatorname{sn}^2 u}}{1 + k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{Sn}^2 v_0},$$

où nous avons représenté par Sn la fonction conjuguée de sn. Cette fonction n'a reçu aucun nom et n'aurait, du reste, que peu d'utilité; nous ne l'introduisons que momentanément pour mieux faire ressortir l'analogie avec le cas du sinus.

Posons $\operatorname{sn} u = \xi$, $\operatorname{sn}(u + v_0\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1}$, $\operatorname{Sn} v_0 = V_0$; en séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on aura

$$U^2 = \frac{\xi^2(1 + V_0^2)(1 - k^2 V_0^2)}{(1 + k^2\xi^2 V_0^2)^2},$$

$$V^2 = \frac{V_0^2(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)}{(1 + k^2\xi^2 V_0^2)^2}.$$

Éliminant ξ^2 entre ces deux équations on a, pour le lieu cherché,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & k^2(U^2+V^2)^2 - \frac{(1+k^2)(1+k^2V_0^4)+4k^2V_0^2}{(1+V_0^2)(1+k^2V_0^2)}U^2 \\ & \qquad - \frac{1+k^2V_0^4}{V_0^2}V^2+1=0. \end{aligned}\right.$$

En opérant de même, dans le cas où z décrit une parallèle à l'axe ov, il est de la forme $u_0+v\sqrt{-1}$, on a

$$\operatorname{sn}(u_0+v\sqrt{-1})$$
$$= \frac{\operatorname{sn}u_0\sqrt{1+\operatorname{Sn}^2v}\sqrt{1+k^2\operatorname{Sn}^2v}+\sqrt{-1}\operatorname{Sn}v\sqrt{1-\operatorname{Sn}^2u_0}\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2u_0}}{1+k^2\operatorname{sn}^2u_0\operatorname{Sn}^2v};$$

posant $\operatorname{sn}u_0 = U_0$, $\operatorname{Sn}v = \xi$, on a les deux équations

$$U^2 = \frac{U_0^2(1+\xi^2)(1+k^2\xi^2)}{(1+k^2U_0^2\xi^2)^2},$$

$$V^2 = \frac{\xi^2(1-U_0^2)(1-k^2U_0^2)}{(1+k^2U_0^2\xi^2)^2}.$$

Éliminant ξ^2 on arrive à

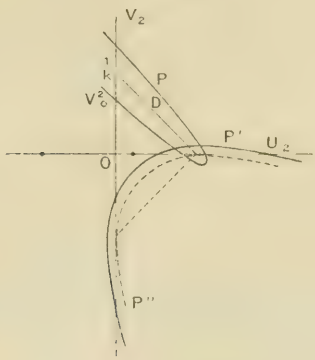
$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & k^2(U^2+V^2)^2 + \frac{(1+k^2)(1+k^2U_0^4)-4k^2U_0^2}{(1-U_0^2)(1-k^2U_0^2)}V^2 \\ & \qquad - \frac{1+k^2U_0^4}{U_0^2}U^2+1=0. \end{aligned}\right.$$

Pour nous rendre compte de l'allure générale des courbes des formules (7) et (8), considérons U^2 et V^2 comme étant les coordonnées (*fig.* 14). Les courbes (7) sont alors des paraboles telles que P dont l'axe a pour coefficient angulaire -1; elles coupent l'axe OV^2 aux points V_0^2 et $\frac{1}{k^2V_0^2}$; et l'axe OU^2 aux points $\frac{1+V_0^2}{1+k^2V_0^2}$ et $\frac{1}{k^2}\,\frac{1+k^2V_0^2}{1+V_0^2}$. *Elles n'ont aucun point commun dans le premier quadrant.*

Pour $V_0^2 = \frac{1}{k}$ on a la droite double D qui coupe les axes en $U^2 = \frac{1}{k}$, $V^2 = \frac{1}{k}$.

Les courbes (8) sont aussi des paraboles telles que P′, leurs axes ont la même direction que ceux des paraboles P; mais elles sont dirigées en sens contraire; elles coupent l'axe OU^2 aux points U_0^2 et $\frac{1}{k^2 U_0^2}$ et l'axe OV^2 aux points $-\frac{1-U_0^2}{1-k^2 U_0^2}$ et $-\frac{1}{k^2}\frac{1-k^2 U_0^2}{1-U_0^2}$; pour $U_0^2 = \frac{1}{k}$

Fig. 14.



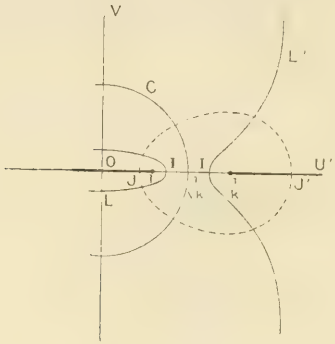
et $V_0^2 = -\frac{1}{k}$, on a la parabole P″ tangente aux axes en ces points. Les paraboles P′ n'ont aucun point commun.

Quant aux courbes (7) et (8), on les obtiendra en faisant correspondre à chaque point U^2, V^2 du premier quadrant (puisque U^2 et V^2 doivent être positifs pour que U et V soient réels) quatre points $(+U, +V)$, $(+U, -V)$, $(-U, +V)$, $(-U, -V)$.

Les courbes obtenues sont donc symétriques (*fig.* 15) par rapport aux axes OU, OV. Parmi les courbes (7) (en trait plein) se trouve le cercle double C de rayon $\frac{1}{\sqrt{k}}$

qui correspond à la droite D de la *fig.* 14. Toutes les courbes sont fermées sauf la courbe limite qui se confond avec l'axe OU; elles coupent l'axe OU en deux points I, I′ compris entre les points d'abscisses 1 et $\frac{1}{k}$; et en deux points symétriques par rapport à OV; elles

Fig. 15.



coupent OV en quatre points symétriques deux à deux par rapport à OU; deux de ces points s'éloignent à $\pm\infty$, tandis que les deux autres tendent vers o.

Les courbes (8) figurées en points admettent aussi OU et OV pour axes de symétrie, elles ne coupent jamais OV; à la limite elles se confondent avec cette droite; elles coupent la partie positive, par exemple, de OU en deux points J et J′, l'un J entre o et 1, l'autre J′ entre $\frac{1}{k}$ et ∞ [1].

---

[1] Si dans l'équation (8) on fait $U_0^2 = \frac{1 \pm k'}{k^2}$ avec $k^2 + k'^2 = 1$, on a une courbe telle que le produit des distances de chacun de ses points aux deux points fixes $U = \pm \frac{1}{k}$, $V = 0$ est constant et égal à $\frac{k'}{k^2}$.

On pourrait démontrer que les systèmes (7) et (8) sont orthogonaux.

Les courbes (7) n'ont aucun point commun, il en est de même des courbes (8). Les unes et les autres sont des courbes fermées. Comme dans le cas des ellipses relatives à $\sin z$ (n° 11) on verra qu'il ne peut exister de position limite ni sur les courbes (7), ni sur les courbes (8), $\operatorname{sn} z$ et sa conjuguée $\operatorname{Sn} z$ ont donc chacune une période réelle ; $\operatorname{sn} z$ *a donc une période réelle et une période imaginaire.*

26. *Dégénérescences de* sn. — Quand on fait $K^2 = 0$, $\operatorname{sn} z$ dégénère en $\sin z$.

Le théorème d'addition (5), n° 18, se réduit à (1) (n° 1).

L'équation différentielle du n° 21 se réduit à celle du n° 5. Les parties des courbes (7) intérieures à C (*fig.* 15) se transforment en ellipses homofocales de foyers ± 1, le cercle C s'éloigne à l'infini et les portions des courbes (8) intérieures au cercle C deviennent les hyperboles du n° 10 homofocales et orthogonales aux ellipses.

Quand on fait $k^2 = 1$, $\operatorname{sn} z$ dégénère en $\operatorname{Th} z$.

Le théorème d'addition (5) se réduit à

$$y = \frac{a(1-x^2) - x(1-a^2)}{1-a^2x^2} = \frac{a+x}{1+ax},$$

c'est l'équation du n° 13.

L'équation différentielle du n° 21 se réduit à celle du n° 13.

Les courbes (7) (*fig.* 15) se transforment de la façon suivante :

Les points de OU d'abscisses 1, $\frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\frac{1}{k}$ se confondent :

les parties telles que LI et I'L' des courbes (7) se réunissent en un même point d'abscisses ± 1 et reproduisent les cercles C_1, C_2, ... de la *fig.* 10; les courbes (8) deviennent des cercles tels que D de la *fig.* 10.

27. *Les fonctions complémentaires.* — On appliquera facilement cette représentation géométrique aux fonctions $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ définis par les relations

$$\operatorname{cn} z = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 z}, \qquad \operatorname{dn} z \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z}.$$

et dont on formera d'abord le théorème d'addition.

Dans les *Nouvelles Annales* (août 1898) M. Iaggi a proposé d'adjoindre à la fonction $\operatorname{sn} z$ une fonction qu'il appelle *cosinus elliptique* et qu'il note $\cos_e z$, définie par la relation

$$\cos_e z = \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z},$$

ou bien, par suite,

$$\cos_e z = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z}}.$$

La représentation géométrique que nous avons exposée permet de donner de la fonction de M. Iaggi une interprétation simple.

Reprenons d'abord la formule (1) et faisons $a = 1$, il vient

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

L'ellipse de la *fig.* 1 devient un cercle de rayon 1; et si l'ordonnée y d'un point de ce cercle est considérée comme étant $\sin z$, l'abscisse x est $\cos z$ puisque l'on a par définition

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}.$$

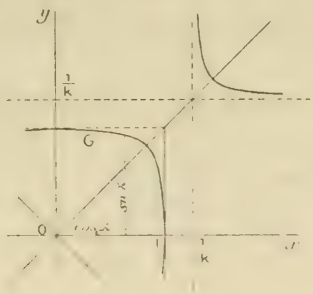
Reprenons de même l'équation (5) en y faisant $a = 1$,

elle devient

$$y = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - k^2 x^2}}.$$

La courbe de la *fig.* 11, tout en restant symétrique par rapport aux bissectrices des axes, devient symétrique par rapport aux axes eux-mêmes (*fig.* 16); de la rela-

Fig. 16.



tion ci-dessus on tire, en effet, $x = \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - k^2 y^2}}$; on peut donc permuter x et y.

On remarque que les points de croisement des asymptotes qui se trouvaient dans la concavité des branches infinies (*fig.* 11) sont ici en dehors de ces régions; cela vient de ce que les asymptotes sont ici les limites des tangentes horizontales et verticales aux branches infinies de la *fig.* 11. Plus k^2 est voisin de 0, plus la courbe centrale se rapproche du cercle de rayon 1 et plus les branches infinies s'éloignent. Plus k^2 est voisin de 1, plus l'ensemble des courbes se rapproche des quatre droites $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

D'après ce qu'on vient de voir, si l'on considère $\operatorname{sn} z$ comme représentant l'ordonnée d'un point de la courbe, son abscisse n'est autre que la fonction $\cos_\rho z$ de M. Iaggi. On a ainsi plus d'analogie avec le cercle.

On appelle *intégrales de première espèce* et de *seconde espèce* les intégrales

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}, \quad \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

L'intégrale de seconde espèce peut se ramener à celle de première espèce et à celle qui représente l'aire comprise entre la courbe G, les axes et une parallèle à l'axe oy; en effet, si l'on appelle g cette surface, on a

$$g = \int_0^x \sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}\,dx,$$

ou, en multipliant les deux termes par $\sqrt{1-x^2}$,

$$\int_0^x \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}\,dx$$
$$= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} - \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}};$$

par suite :

Intégrale de seconde espèce = Intégrale de première espèce $-g$.

28. *La fonction* $\wp$. — On exprime d'ordinaire $\wp(p+q)$ en fonction de $\wp(p)$, $\wp(q)$, $\wp'(p)$ et $\wp'(q)$; au moyen des relations entre $\wp'(p)$ et $\wp(p)$, $\wp'(q)$ et $\wp(q)$, on exprimera $\wp(p+q)$ en fonction symétrique de $\wp(p)$ et de $\wp(q)$. On pourra ensuite appliquer à la fonction $\wp$ les méthodes précédentes; nous engageons le lecteur à le faire. Ici nous nous bornerons à chercher les courbes analogues à (7) et (8). La fonction $\wp$ est, comme l'on sait, définie par trois constantes e_1, e_2, e_3; dans le cas particulier où l'on fait

$$e_3 - e_1 = 1, \qquad e_2 - e_1 = k^2.$$

on a la relation

$$(9) \qquad p(z) + \frac{1+k^2}{3} = \frac{1}{\mathrm{sn}^2(z)}.$$

On peut de là, sans écrire le théorème d'addition de p, trouver pour cette fonction des courbes analogues aux courbes (7) et (8) relatives à sn.

En effet, dans les équations (7) et (8) passons en coordonnées polaires, en posant

$$\mathrm{sn}(z) = \mathrm{R}e^{\Omega\sqrt{-1}},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{U} = \mathrm{R}\cos\Omega, \qquad \mathrm{V} = \mathrm{R}\sin\Omega.$$

L'équation (7) prendra la forme

$$\mathrm{R}^4 + \mathrm{AR}^2\cos^2\Omega + \mathrm{BR}^2\sin^2\Omega + \mathrm{C} = 0,$$

A, B, C étant trois constantes dont une seule est arbitraire.

Il en sera de même pour l'équation (8). Si maintenant l'on pose

$$p(z) + \frac{1+k^2}{3} = \rho e^{\omega\sqrt{-1}},$$

l'équation (9) équivaudra aux deux suivantes

$$\rho = \frac{1}{\mathrm{R}^2}, \qquad \omega = -2\Omega.$$

Par suite, au moyen de la transformation $\rho = \frac{1}{\mathrm{R}^2}$, $\omega = -2\Omega$, on pourra à chaque point des courbes (7) et (8) faire correspondre un point des courbes analogues relatives à $p + \frac{1+k^2}{3}$. Ces courbes n'admettent que l'axe réel pour axe de symétrie (*fig.* 17).

Les courbes qui représentent les variations de $p(z) + \frac{1+k^2}{3}$ quand z décrit dans son plan une parallèle à ou, et varie par suite de quantités réelles, n'ont

entre elles aucun point commun. Il en est de même pour les autres qui correspondent aux cas où z varie de quantités purement imaginaires. De plus, les deux systèmes de courbes sont constitués par des courbes fermées (sauf les courbes limites).

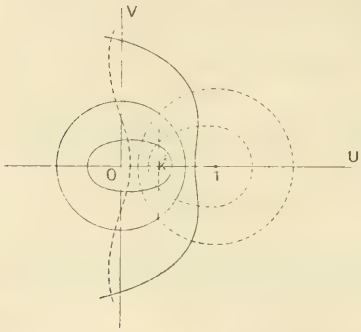
Les deux systèmes sont orthogonaux, car les courbes (7) et (8) sont orthogonales et la *transformation*

$$\rho = \frac{1}{R^2}, \qquad \omega = -2\Omega,$$

n'altère pas les angles.

Parmi ces courbes se trouvent le cercle de rayon k

Fig. 17.



ayant l'origine pour centre et le cercle de rayon k' ayant pour centre le point $V = 0$, $U = 1$.

On sait que p jouit de propriétés plus simples que sn. En ce qui concerne les courbes invariantes que nous venons de considérer, un fait analogue se produit. Il y a entre les deux systèmes de courbes une symétrie particulière qui devient la symétrie ordinaire quand $k^2 = k'^2 = \frac{1}{2}$. L'axe de symétrie est alors la parallèle à OV à la distance $\frac{1}{2}$.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1899. — COMPOSITIONS.

Marseille.

Analyse infinitésimale.

Épreuve écrite. — *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface représentée en coordonnées cartésiennes par le système d'équations*

$$x = l\cos\theta\cos\varphi, \qquad y = l\cos\theta\sin\varphi, \qquad z = a\varphi + l\sin\theta,$$

où les paramètres a et θ *sont fixes et les paramètres l et* φ *variables et indépendants l'un de l'autre.*

On trouve : $l(\varphi - \varphi_0 = \text{const}$.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

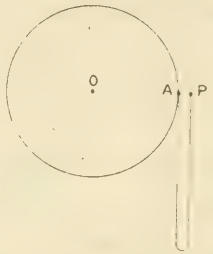
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

En intégrant le long d'un contour formé par l'axe des x réels et un demi-cercle d'un très grand rayon ayant pour centre l'origine, on trouve : $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Une poulie de rayon* R *et de masse* M *peut tourner sans frottement autour de son axe* O *qui est horizontal et fixe.*

Sur la circonférence de la poulie s'enroule un fil flexible, inextensible et sans masse, dont l'une des extrémités est fixée sur la poulie, et dont l'autre extrémité se trouve primitivement en A *sur le diamètre ho-*



rizontal de la poulie. A cette extrémité A *est attaché un fil flexible, élastique et sans masse, de longueur* a, *qui porte un poids* P *de masse* m; *mais ce fil est d'abord replié sur lui-même de manière que primitivement le poids* P *est très voisin du point* A.

Tout le système étant d'abord immobile, on abandonne à lui-même le poids P *qui, bientôt, tend les fils et donne au fil élastique un allongement* x, *dont la valeur est reliée à celle de la tension* T *par l'expression*

$$T = \lambda \frac{x}{a}.$$

Sachant que le fil ne peut pas supporter une tension supérieure à 100^{kg}, *on demande s'il se rompra, sachant que l'on a*

$$M = 10m, \qquad \lambda = 1000, \qquad p = 10, \qquad a = 4, \qquad R = 1.$$

On a, pour le mouvement de la poulie,

$$MK^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = TR \qquad \text{ou} \qquad 5mR \frac{d^2\theta}{dt^2} = T,$$

et, pour le mouvement du poids,

$$m\left(R\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d^2x}{dt^2}\right)=mg-T,\qquad T=\frac{\lambda x}{a}.$$

On est ramené à discuter l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{6\lambda}{5am}\left(x-\frac{5am}{6\lambda}\right)=0.$$

Son intégrale

$$x=\frac{5am}{6\lambda}(1-\cos ht)+\frac{\sqrt{2ga}}{h}\sin ht,\qquad h=\sqrt{\frac{6\lambda}{5am}}$$

montre que l'allongement ne dépasse pas l'allongement donné par la relation

$$X\frac{1000}{4}=100.$$

Le fil ne rompt pas.

Épreuve pratique. — *Un fil pesant et homogène a une longueur de* 8^m, *il est attaché par ses extrémités à deux points fixes* A *et* B *qui sont sur une même horizontale et dont la distance est égale à* 4^m.

Trouver à un millimètre près la flèche de la chaînette décrite par le fil et trouver à un gramme près les tensions en A *et* B, *sachant que le fil pèse* 1^{kg} *par mètre.*

Astronomie.

Épreuve pratique. — *Calculer le volume* V *d'un parallélépipède oblique, connaissant les longueurs* a, b, c *des trois arêtes et les angles* α, β, γ *que ces arêtes font entre elles.*

1° *On démontrera la formule*

$$V=2abc\sqrt{\sin p\sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)},$$

où

$$2p=\alpha+\beta+\gamma;$$

2° *On appliquera cette formule aux données numériques suivantes :*

$$a = 7^{m},36592 \qquad \alpha = 62^{\circ}.53'.17'',4$$
$$b = 6,72941 \qquad \beta = 65.48.56,7$$
$$c = 5,84326 \qquad \gamma = 68.34.48,5$$

Calcul du volume d'un parallélépipède oblique

$$V = 2abc\sqrt{\sin p \sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)} = 2abc\Delta.$$

$a = 7^{m},36592$	$\alpha = 62^{\circ}.53'.17'',4$	$p = 98^{\circ}.38'.31'',3$
$b = 6,72941$	$\beta = 65.48.56,7$	$p - \alpha = 35.45.13,9$
$c = 5,84327$	$\gamma = 68.34.48.5$	$p - \beta = 32.49.34,6$
	$2p = 197.17.\ 2,6$	$p - \gamma = 30.\ 3.42,8$

	Log.		Log.
$\sin p$.....	$\bar{1},9950410$	2....	0,3010300
$\sin(p-\alpha)$...	$\bar{1},7666391$	a....	0,8672270
$\sin(p-\beta)$...	$\bar{1},7340743$	b....	0,8279769
$\sin(p-\gamma)$...	$\bar{1},6997815$	c....	0,7666552
Δ^2.....	$\bar{1},1955359$	Δ....	$\bar{1},5977679$
		V....	2,3606579

SOLUTION.

$$V = 229^{mc},433624 = 229\,433^{lit},624.$$

Montpellier.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Déterminer l'intégrale générale du système d'équations*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{bc}{a}x\frac{dz}{dx} - ay - bz = b(x+c),$$
$$x^2\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{ac}{b}x\frac{dy}{dx} - \frac{a^2}{b}y - az = -a(x+c),$$

où y et z sont deux fonctions de x.

Examiner les cas particuliers $c = 0$, $c = \pm 1$.

Épreuve pratique. — *Soit l'ellipsoïde rapporté à ses axes*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

et l'hyperboloïde

$$(x+h)^2 - 2a^2\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = (h-a)^2$$

où $0 < h < 3a$, *ces deux surfaces se coupent suivant une ellipse réelle située dans le plan*

$$x = a - \frac{2h}{3}.$$

On considère la portion d'ellipsoïde comprise entre cette ellipse et le plan $x = a$, *et la portion d'hyperboloïde comprise entre l'ellipse et le sommet de le même nappe. Déterminer le volume compris entre ces deux portions de surfaces.*

On pourra examiner séparément les deux cas suivants :

1° $0 < h < a$;

2° $a < h < 3a$.

Astronomie.

Épreuve pratique. — *Les éléments de la planète* (24) *Thémis sont :*

$M = S = 165^\circ 24' 31'',2$, 1888, nov. 2,0. T. m. Berlin.

(*Distance nœud périhélie*).

$$\left.\begin{array}{l} \omega = 107^\circ.58'.42'',0 \\ \Omega = 35.36.49,3 \\ i = 0.48.12,1 \end{array}\right\} \text{éq. moy. } 1900$$

$$e = \sin\varphi.$$

$$\varphi = 7^\circ 40' 31'',1$$
$$\mu = 641'',1197$$
$$\log a = 0,4953786$$

On demande de calculer :

1° *L'instant où l'anomalie vraie w a pour valeur*

$$73^\circ 47' 40'' :$$

2° *Au même moment, la réduction à l'écliptique ϱ et les coordonnées polaires héliocentriques r, v_1, s par rapport à l'écliptique adopté.*

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un anneau pesant, infiniment petit, est traversé par un fil flexible et inextensible, dépourvu de poids, le long duquel il peut glisser sans frottement. Ce fil est attaché, par ses extrémités, à deux points fixes* F *et* F' *situés sur une même verticale. Le fil étant tendu, et l'anneau occupant la position* M_0, *on imprime à l'anneau une vitesse horizontale, perpendiculaire au plan* FM_0F', *et égale à* V_0.

1° *Trouver le mouvement de l'anneau, en supposant que le fil reste tendu;*

2° *Le point* M_0 *étant supposé au milieu du fil, calculer et étudier la tension du fil.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Établir les formules qui font connaître la vitesse d'un point quelconque d'un solide, lorsque l'on donne les éléments du mouvement hélicoïdal instantané;*

2° *Un tétraèdre solide* ABCD *est en mouvement dans l'espace. A un instant donné, la vitesse du sommet* A *est perpendiculaire au plan* BCD, *et tous les*

points d'un cercle donné, situé dans ce plan, ayant pour centre le pied de la hauteur issue de A et invariablement lié au tétraèdre, ont des vitesses égales à une même valeur donnée.

Déterminer, pour l'instant considéré, les éléments du mouvement hélicoïdal instantané.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Solution du problème de Dirichlet par la méthode Poincaré (méthode dite du balayage). On se bornera au cas où la surface, frontière du domaine d'intégration, est dépourvue de singularités;*

2° *Calculer les composantes de la rotation moyenne en un point d'un milieu en déformation, lorsque ce milieu est rapporté à un système de coordonnées curvilignes rectangles.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une poutre horizontale, homogène et de section circulaire constante, appuyée librement en o et encastrée en A, est soumise, d'une part à une charge uniformément répartie Q, et d'autre part à une charge P appliquée au milieu I de la poutre. On demande :*

1° *De calculer le moment de flexion en un point de la poutre situé à une distance x de l'appui simple o;*

2° *D'indiquer le schéma graphique de la distribution de ce moment de flexion et de définir la position de la section dangereuse;*

3° *De calculer le rayon de la section de la poutre qui doit résister aux charges Q et P quand on prend les données numériques suivantes :*

Longueur de la poutre $l = 18^{m}$. $P = \frac{2}{3}Q$.

Q étant le poids du volume d'eau qui, à la température de 4°, remplit une sphère d'un rayon égal à 1^{m}.

La charge par millimètre carré de la traction qui produit la rupture est supposée égale à 27^{kg}. *La fraction de sécurité est prise égale à* $\frac{1}{6}$. *On néglige l'influence de l'effort tranchant.*

Nancy.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Choisir la fonction* $Q(x, y, z)$ *de façon que*

$$\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y}\right) dx + Q(x, y, z) dy + \frac{x}{y} dz$$

soit différentielle totale et intégrer cette différentielle.

II. *Rayon de courbure et centre de courbure en un point quelconque d'une courbe gauche.*

III. *On considère la courbe* (c) *qui, rapportée à des axes rectangulaires* ox, oy, oz, *est définie par les formules*

$$x = a\cos t + at\sin t,$$
$$y = a\sin t - at\cos t,$$
$$z = \frac{at^2}{2}\operatorname{tang}\varphi,$$

où t *désigne un paramètre variable,* a *et* φ *des constantes.*

1° *Calculer, pour un point quelconque de la courbe* (c), *la longueur de l'arc compté à partir du point pour lequel* $t = 0$ *et la longueur correspondante de l'arc de la projection de la courbe* (c) *sur le plan* xoy; *en conclure que la courbe est une hélice;*

2° *Déterminer, en un point quelconque de la*

courbe (c), le rayon de courbure, le rayon de torsion et les coordonnées du centre de courbure.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

prise le long du petit cercle d'intersection de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

par le plan

$$x + z - r = 0$$

dans le sens qui va de oz vers ox en passant dans le trièdre positif des coordonnées.

Algèbre supérieure.

Épreuve écrite. — *On considère la fonction pu de Weierstrass construite avec les périodes 2ω et $2\omega'$.*

1° *Vérifier la formule*

$$p(2u) + 2pu = \frac{1}{4}\left(\frac{p''u}{p'u}\right)^2.$$

2° *Si l'on pose $x = pu$, on a*

$$p(2u) = \Phi(x),$$

$\Phi(x)$ étant une fonction rationnelle de x;

3° *Les racines de l'équation du quatrième degré en x*

$$\Phi(x) - p(2u) = 0$$

sont

$$pu, \quad p(u+\omega), \quad p(u+\omega+\omega'), \quad p(u+\omega')$$

et l'on a la relation

$$4p(2u) = pu - p(u+\omega) - p(u+\omega+\omega') - p(u+\omega').$$

4° *Vérifier que la fonction rationnelle $\Phi(x)$ décom-*

posée en fractions simples peut s'écrire

$$4\Phi(x) = x + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{x - e_1} + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{x - e_2}$$
$$+ \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{x - e_3},$$

en posant, suivant l'usage,

$$e_1 = p\omega, \qquad e_2 = p(\omega + \omega'), \qquad e_3 = p\omega'.$$

5° *Si, dans la fonction rationnelle* $\Phi(x)$, *on effectue la substitution*

$$x = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{x_0 - e_1},$$

$\Phi(x)$ *se transforme identiquement en* $\Phi(x_0)$;

6° x_0 *étant une constante donnée, exprimer en fonction de* x_0 *les racines de l'équation du quatrième degré*

$$\Phi(x) = \Phi(x_0).$$

7° *On peut déduire de ce qui précède que si l'on effectue la substitution*

$$y = \Phi(x)$$

dans l'expression différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}},$$

elle se transforme identiquement en

$$\frac{2\,dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

1° et 2° La formule à démontrer se déduit immédiatement de la formule d'addition

$$p(u + v) + pu + pv = \frac{1}{4}\left(\frac{p'v - p'u}{pv - pu}\right)^2$$

en y faisant tendre v vers u; et, pour obtenir $\Phi(x)$, il n'y a plus qu'à remplacer $p'^2 u$ et $p'' u$ par leur valeur en fonction de $x = pu$.

3° Si l'on pose $x = pu'$, l'équation $\Phi(x) - p(2u) = 0$ devient

$$p(2u') = p(2u)$$

et elle entraîne

$$u' = u - m\omega + n\omega',$$

m et n désignant des nombres entiers.

La relation

$$p(2u) = pu + p(u + \omega) - p(u - \omega + \omega') + p(u + \omega')$$

s'obtient en remarquant que la somme des racines de l'équation du quatrième degré est $4p(2u)$, ou encore en décomposant $p(2u)$ en éléments simples.

4° La décomposition de $\Phi(x)$ en fractions simples résulte immédiatement de la relation précédente et des formules relatives à l'addition d'une demi-période.

5° Si l'on ajoute la demi-période ω à u dans chacun des termes de la somme

$$pu + p(u + \omega) + p(u + \omega - \omega') - p(u + \omega'),$$

le premier et le second, le troisième et le quatrième de ces termes s'échangent entre eux; mais ajouter ω à u c'est remplacer x par

$$x' = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{x - e_1}.$$

6° Les racines de l'équation $\Phi(x) = \Phi(x')$ sont

$$x', \quad e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{x' - e_1}, \quad e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{x' - e_2},$$

$$e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{x' - e_2}.$$

7° Si l'on pose $x = pu$, il en résulte

$$y = \Phi(x) = p(2u),$$

puis

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = du, \qquad \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = 2\,du.$$

Remarque. — La fonction rationnelle $\Phi(x)$ peut se déduire de la fraction

$$\frac{h(x)}{\psi(x)}$$

où

$$\psi(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4,$$

et où $h(x)$ est le covariant hessien de $\psi(x)$, en faisant, après le calcul du hessien,

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 0, \qquad a_3 = -\tfrac{1}{4} g_2, \qquad a_4 = -g_3.$$

En s'appuyant sur cette remarque, et en se servant de la relation entre les invariants et les covariants d'une forme biquadratique, on peut vérifier par un calcul direct l'égalité

$$\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = \frac{2\,dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

indiquée dans la septième partie de l'énoncé.

Voir à ce sujet Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 360, le paragraphe intitulé : *Formule de duplication.*

Épreuve pratique. — *Étant donnée l'équation qui fournit la valeur de* $\operatorname{tang}\frac{a}{3} = \frac{x}{y}$ *en fonction de* $\operatorname{tang} a = \frac{\lambda}{\mu}$, *appliquer la théorie des invariants de la forme binaire cubique à la réduction du premier membre de cette équation à la forme canonique et à sa résolution algébrique.*

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Geminiano Pirondini à M. V. Antomari.

... Dans son article *Sur quelques questions de la théorie des lignes à double courbure*, que M. H. Piccioli vient de publier dans les *Nouvelles Annales* (novembre 1899), l'auteur démontre que l'hélice cylindro-conique n'est pas placée, en général, sur un cône de révolution. Je profite de l'occasion pour vous signaler un Mémoire *Sur les trajectoires orthogonales des génératrices d'une surface développable*, inséré dans le *Journal für die reine und andgewandte Mathematik* (Bd 118; 1897), dans lequel j'ai étudié à un point de vue tout à fait général les hélices cylindro-coniques, et en particulier les lignes qu'on peut regarder comme des hélices de deux cônes.

RECTIFICATION.

Les *Nouvelles Annales* ont publié dans le numéro d'avril 1900 une solution, par M. Vacquant, du problème de Mathématiques élémentaires donné au Concours d'agrégation en 1899.

Un léger défaut de rédaction m'a fait considérer comme insuffisante la détermination d'une asymptote. L'auteur dit en effet (p. 185, lignes 4, 5 et 6) : « de plus, quand le point M vient en I, le point M′ étant à l'infini sur la droite MM′ de direction D_1, le point I est un point de l'asymptote de direction D_1 ». Il a voulu dire que le point M′ est le point de rencontre à distance finie d'une parallèle MM′ à l'asymptote; et comme il passe à l'infini quand M vient en I, le point I est un point de l'asymptote. Ainsi comprise la détermination de l'asymptote est exacte.

X. A.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1900. COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

I. *Dans le plan* (P) *d'une section plane d'une surface* (E), *pour trouver les normales à la section issues d'un point* O, *on peut employer la méthode suivante : couper* (E) *par une sphère* (S), *et déterminer le rayon r de la sphère de façon que le plan* (P) *soit tangent au cône* (C), *qui a pour sommet le point* O *et pour directrice l'intersection* (E, S). *La génératrice de contact* OG *est normale à la section plane au point* G, *où elle rencontre la directrice* (ES) *du cône* (C).

Justifier cette méthode.

II. PREMIÈRE APPLICATION. — *On coupe l'ellipsoïde* (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ *par le plan* (P) $ux + vy + wz = 0$. *Sur le diamètre perpendiculaire on porte, à partir du centre, une longueur* OM *dont le carré soit moyenne harmonique entre les carrés des demi-axes* α *et* β *de la section* $\frac{2}{\overline{OM}^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$. *Lieu du point* M, *quand* (P) *pivote autour du point* O.

III. DEUXIÈME APPLICATION. — *Même problème en remplaçant la longueur* OM *par la longueur* ON *déduite de la formule* $\frac{1}{ON} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$. *Étudier la forme du lieu du point* N, *et celle des sections parallèles aux trois plans des coordonnées.*

On conservera les notations indiquées.

I. Coupons la surface (E) par une sphère (S) de centre O. Le plan (P) coupe la surface (E) suivant la courbe (e) et la sphère (S) suivant le grand cercle (e) de centre O. Les génératrices du cône (C) contenues dans le plan (P) sont les droites qui joignent le point O aux divers points de rencontre A de la courbe (e) et du cercle (s).

Dès lors, si OG est une normale menée de O à (e) et que l'on prenne OG comme rayon de (s), c'est-à-dire de (S), deux des points de rencontre A sont confondus en G, donc deux des génératrices OA du cône sont confondues avec OG et ce cône est tangent au plan (P) suivant OG.

Réciproquement, si cette tangence a lieu, deux des génératrices étant confondues avec OG, deux des points A sont confondus avec G, le cercle (s) est tangent à (e), et, par suite, la normale OG à ce cercle est également normale en G à (e).

II. Les longueurs α et β des demi-axes de la section diamétrale de l'ellipsoïde étant celles des normales menées du centre O à cette section, prenons, d'après la méthode justifiée ci-dessus, le cône passant par l'intersection de l'ellipsoïde et de la sphère de rayon r ayant son centre au point O [1]. L'équation de ce cône est

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0,$$

---

[1] La méthode ici employée est celle qu'impose l'énoncé, mais cette seconde partie du problème peut être résolue beaucoup plus simplement par le procédé que voici :

D'après un théorème bien connu, si γ est le demi-diamètre perpendiculaire au plan donné, on a

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

et il est tangent au plan

$$ux + vy + wz = 0$$

si l'on a

$$\frac{u^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}} + \frac{v^2}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}} + \frac{w^2}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}} = 0$$

ou

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{r^4}(u^2 + v^2 - w^2) \\ &\quad - \frac{1}{r^2}\left[u^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + v^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + w^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\right] \\ &\qquad\qquad + \frac{u^2}{b^2c^2} - \frac{v^2}{c^2a^2} + \frac{w^2}{a^2b^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

La somme $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$ étant celle des racines en $\frac{1}{r^2}$ de

---

d'où

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{\gamma^2}.$$

D'ailleurs γ étant le rayon vecteur situé sur la droite

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w},$$

on a

$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2}}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Si l'on porte cette valeur de $\frac{1}{\gamma^2}$ dans l'expression ci-dessus de $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$, il vient

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{u^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + v^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + w^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}{u^2 + v^2 + w^2},$$

d'où l'équation du lieu

$$\gamma^2 = x^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

cette équation, on a, en adoptant le signe $\sum$ pour les sommes dont les termes se déduisent les uns des autres par permutation circulaire,

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\sum u^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}{\sum u^2}.$$

Par suite, en vertu de l'énoncé,

$$\frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\sum u^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}{\sum u^2}.$$

En outre, le point M étant sur la perpendiculaire élevée en O au plan donné, on a

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w}.$$

Il vient donc pour le lieu demandé, après suppression de la solution étrangère $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (cône isotrope de sommet O),

$$2 = \sum x^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right),$$

ou

$$\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1,$$

ellipsoïde (E_1) de même centre et de mêmes directions d'axes que le précédent, les longueurs de ses axes étant données par

$$\frac{2}{a_1^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \qquad \frac{2}{b_1^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}, \qquad \frac{2}{c_1^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

comme cela résulte d'ailleurs directement de l'énoncé.

L'équation ci-dessus peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=1.$$

Sous cette forme, elle montre que *l'ellipsoïde* (E_1) *a mêmes plans cycliques que l'ellipsoïde proposé.*

III. Le sens dans lequel sont portés les segments α et β n'étant pas défini, on a le droit d'élever au carré la relation donnée, qui s'écrit alors

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{2}{\alpha\beta}.$$

Nous avons déjà calculé ci-dessus $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$. Nous avons, de même, par le produit des racines de l'équation (1),

$$\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{\sum\frac{u^2}{b^2c^2}}{\sum u^2}.$$

Il vient donc

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\sum u^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}{\sum u^2}-2\sqrt{\frac{\sum\frac{u^2}{b^2c^2}}{\sum u^2}},$$

et, par suite, pour le lieu demandé, après multiplication par $x^2+y^2+z^2$,

$$1=\sum x^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-2\sqrt{\sum x^2\sum\frac{x^2}{b^2c^2}},$$

que l'on peut écrire

$$(2)\qquad 1-\sum x^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=-2\sqrt{\sum x^2\sum\frac{x^2}{b^2c^2}}.$$

Si l'on élève au carré pour avoir une équation rationnelle, il est essentiel de remarquer que l'*on introduit*

une solution étrangère correspondant au signe + pris devant le radical du second membre, c'est-à-dire au point N′ porté sur ON et tel que

$$\frac{1}{ON'} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

La surface du 4e degré, représentée par l'équation rendue rationnelle

$$(3) \qquad \left[1 - \sum x^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right]^2 = 4\sum x^2 \sum \frac{x^2}{b^2 c^2},$$

évidemment symétrique par rapport aux trois plans de coordonnées, comprend donc, outre la nappe (N) répondant à la question, une *nappe parasite* (N′) qu'il est d'ailleurs facile de distinguer de la première. Si, en effet, nous appelons (E_2) l'ellipsoïde défini par l'équation

$$1 - \sum x^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) = 0,$$

dont les demi-axes a_2, b_2, c_2 sont donnés par

$$\frac{1}{a_2^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \qquad \frac{1}{b_2^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}, \qquad \frac{1}{c_2^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2},$$

qui, par suite, est homothétique de (E_1) par rapport à O [1], nous voyons, d'après (2), que la substitution des coordonnées des points N dans l'équation de (E_2) donne un résultat négatif alors que c'est le contraire qui a lieu pour les points N′.

En d'autres termes, *la nappe* (N) *constituant le lieu cherché est tout entière à l'extérieur de l'ellipsoïde* (E_2), *tandis que la nappe parasite* (N′) *est à l'intérieur.*

---

[1] Si le point N avait été défini, dans l'énoncé, par la relation $\frac{2}{ON} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$, c'est par l'ellipsoïde même obtenu dans la seconde partie que la séparation eût été faite.

Sous réserve de cette distinction, nous allons étudier la surface représentée par l'équation (3). Il est facile de voir que cette équation développée peut se mettre sous la forme

$$(3\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum x^4\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2 \\ &\quad -2\sum x^2y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right) \\ &\qquad\qquad -2\sum x^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+1=0. \end{aligned}\right.$$

Adoptant, suivant l'usage, l'hypothèse

$$a > b > c,$$

pour définir la grandeur relative des trois axes, nous avons le droit de poser

$$\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=-\frac{1}{a_3^2},\qquad \frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b_3^2},\qquad \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=-\frac{1}{c_3^2}.$$

Moyennant cette convention, et en se reportant à la définition de a_2, b_2, c_2, on peut enfin écrire l'équation

$$(3\ ter)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^4}{a_3^4}+\frac{y^4}{b_3^4}+\frac{z^4}{c_3^4} \\ &\quad +2\left(\frac{x^2y^2}{a_3^2b_3^2}+\frac{y^2z^2}{b_3^2c_3^2}-\frac{z^2x^2}{c_3^2a_3^2}\right) \\ &\qquad\qquad 2\left(\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}+\frac{z^2}{c_2^2}\right)+1=0. \end{aligned}\right.$$

Le cône asymptote de cette surface est donné par l'ensemble des termes du degré le plus élevé qui peut s'écrire

$$\left(\frac{x^2}{a_3^2}-\frac{z^2}{c_3^2}\right)^2+2\frac{y^2}{b_3^2}\left(\frac{x^2}{a_3^2}+\frac{z^2}{c_3^2}\right)+\frac{y^4}{b_3^4}=0,$$

et cette somme de carrés ne saurait évidemment s'annuler que pour

$$y=0,\qquad \frac{x^2}{a_3^2}-\frac{z^2}{c_3^2}=0.$$

Autrement dit le cône asymptote se réduit à l'ensemble des deux droites

$$y = 0, \qquad \frac{x}{z} = \pm \frac{a_3}{c_3} = \pm \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}},$$

dans lesquelles on reconnaît les normales aux plans cycliques réels de l'ellipsoïde (E). Ce résultat était facile à prévoir *a priori*. Il ne saurait y avoir de points à l'infini que dans la direction des droites ON, pour lesquelles s'annule la différence $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$, c'est-à-dire des normales aux sections pour lesquelles on a $\alpha = \beta$, qui sont les sections cycliques passant par l'axe moyen Oy. On déduit immédiatement de là que, parmi les sections de la nappe (N) parallèles aux plans principaux, seules celles qui sont parallèles à Oxz pourront avoir des branches infinies. Il est bien évident d'ailleurs que la branche parasite (N′), comprise tout entière à l'intérieur de l'ellipsoïde (E_2), ne saurait avoir de points à l'infini. Nous allons maintenant étudier en détail la forme de ces sections.

Convenons auparavant de représenter par X_1, Y_1, Z_1 les sommets de la nappe utile de la surface, donnés respectivement sur Ox, Oy, Oz par $x_1 = \pm \frac{bc}{b - c}$, $y_1 = \pm \frac{ca}{c - a}$, $z_1 = \pm \frac{ab}{a - b}$, comme le montre la définition même du lieu appliquée aux sections principales et comme le vérifie le calcul. De même, X'_1, Y'_1, Z'_1 désigneront les sommets correspondants de la nappe parasite donnés par $x'_1 = \pm \frac{bc}{b + c}$, $y'_1 = \pm \frac{ca}{c + a}$, $z'_1 = \pm \frac{ab}{a + b}$.

Convenons également de poser

$$A = a^2 - bc, \qquad B = b^2 - ca, \qquad C = c^2 - ab,$$

en remarquant qu'on a toujours $A > 0$, $C < 0$, tandis que B peut avoir l'un ou l'autre signe.

Sections parallèles au plan Oxy. — Prenons d'abord la section de la surface par le plan Oxy lui-même en faisant $z = 0$ dans l'équation (3 *ter*), ce qui donne

$$\left(\frac{x^2}{a_3^2} + \frac{y^2}{b_3^2}\right)^2 - 2\left(\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2}\right) + 1 = 0,$$

courbe fermée, comme on vient de le voir et comme cela se vérifie immédiatement sur l'équation, qui comprend deux branches, l'une parasite intérieure à la section principale correspondante de l'ellipsoïde (E_2) défini plus haut, l'autre appartenant au lieu demandé, extérieure à cette même section principale.

La tangente $y = y_1$ au sommet Y_1 coupe en outre la courbe en des points dont les abscisses sont données par

$$\frac{x^2}{a_3^2} - 2\left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{y_1^2}{a_3^2 b_3^2}\right) = 0.$$

Ces points seront réels si

$$\frac{1}{a_2^2} - \frac{y_1^2}{a_3^2 b_3^2} > 0,$$

ou, en remplaçant y_1, a_2, a_3 et b_3 par leurs valeurs,

$$\frac{1}{b^2 c^2}\left[b^2 + c^2 - \frac{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}{(a - c)^2}\right] > 0,$$

ou encore, en réduisant et supprimant tous les facteurs positifs,

$$-B > 0,$$

c'est-à-dire

$$B < 0.$$

Le même calcul, appliqué au sommet X_1, montre que la condition vérifiée $A > 0$ fait que la tangente $x = x_1$ coupe la courbe en des points imaginaires.

Si $B > 0$, les tangentes aux sommets Y_1 ne coupent de même la courbe qu'en des points imaginaires, et la disposition est celle de la *fig.* 1, où le trait plein indique

Fig. 1.

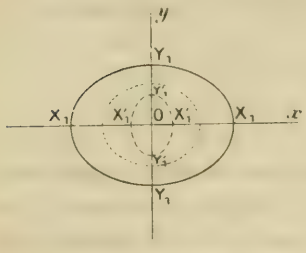
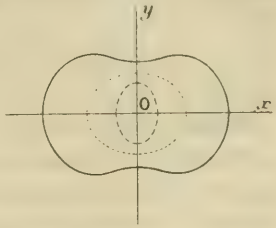


Fig. 1 *bis*.



la branche utile de la courbe, le trait interrompu la branche parasite, et le trait pointillé l'ellipse de séparation. Si $B < 0$, la tangente en X_1 coupe la courbe en des points réels; on a la disposition de la *fig.* 1 *bis*.

Si, d'ailleurs, partant de la disposition 1, on fait croître z, on atteint à la disposition 1 *bis*, les sommets Y_1 se rapprochant de plus en plus jusqu'à ce que, pour $z = z_1$, ces deux sommets se réunissent au point O pour donner la disposition de la *fig.* 1 *ter*.

Fig. 1 *ter*.

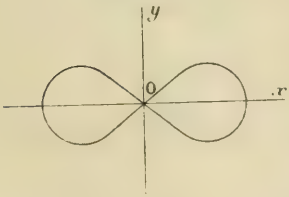
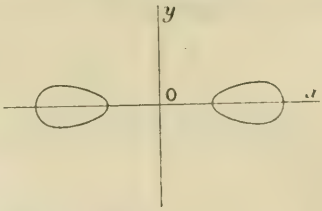


Fig. 1 *quater*.



Remarquons que, dans l'intervalle, pour $z = z'_1$ la branche parasite s'est évanouie en se réduisant à un point en O.

Pour $z > z_1$, la courbe se sépare en deux ovales, ainsi que le montre la *fig.* 1 *quater*.

Sections parallèles à Oyz. — La discussion est la même que ci-dessus. On trouve que, par suite de la condition vérifiée $C < 0$, la tangente au sommet Z_1 ne coupe jamais la courbe en des points réels, et que la tangente au sommet Y_1 la coupe en des points réels si $B > 0$, condition *inverse* de celle ci-dessus, en sorte que la section par le plan Oyz présente des points d'inflexion si la section par Oxy n'en présente pas, et réciproquement.

Sous réserve de cette remarque essentielle, les états successifs des sections parallèles à Oyz sont données par les *fig.* 1 à 1 *quater*, dans lesquelles il suffit de changer x en z.

Il est bien entendu d'ailleurs que, si parallèlement à Oxy on commence par la disposition 1, parallèlement à Oyz c'est par la disposition 1 *bis*, et inversement.

Dans le cas où $B = 0$, les sections par Oxy et Oyz ont l'une et l'autre, en Y_1, quatre points confondus sur la tangente en ce point, perpendiculaire à Oy. Elles présentent alors en ces sommets ce qu'on peut appeler un *méplat*.

Sections parallèles à Ozx. — La section par le plan Ozx a une équation qui peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{x^2}{a_3^2} - \frac{z^2}{c_3^2}\right)^2 - 2\left(\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{c_2^2}\right) + 1 = 0.$$

Ici les directions asymptotiques sont réelles :

$$\frac{x}{a_3} = \pm \frac{z}{c_3}.$$

Pour trouver les asymptotes parallèles à l'une d'elles, posons

$$\frac{x}{a_3} = \frac{z}{c_3} + \lambda,$$

et ayant fait cette substitution, annulons le terme en z^2,

ce qui nous donne

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_3^2}{a_2^2} + \frac{c_3^2}{c_2^2}\right).$$

Nous voyons qu'il y a ainsi quatre asymptotes réelles symétriques deux à deux par rapport aux axes Ox et Oy, et coupant chacune la courbe en un point à distance finie. Il est d'ailleurs bien évident que la branche parasite est intérieure au losange formé par les tangentes parallèles aux asymptotes, sans quoi il existerait des parallèles à ces asymptotes coupant la courbe en plus de quatre points. On a ainsi la disposition de la *fig.* 2 (¹).

Fig. 2.

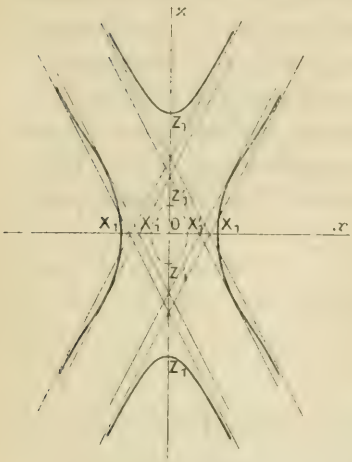
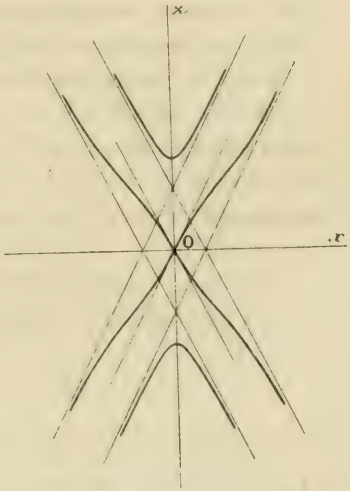


Fig. 2 *bis*.



Si l'on donne à y une valeur quelconque, les λ des

(¹) Les *fig.* 2 à 2 *quater* correspondent à l'hypothèse $B > 0$, pour laquelle la section Oxy présente la disposition de la *fig.* 1, et la section Oyz celle de la *fig.* 1 *bis*. Si l'on supposait $B < 0$, auquel cas ces deux dernières dispositions permuteraient entre elles, il faudrait sur les *fig.* 2 à 2 *quater* permuter entre eux les axes Ox et Oz.

asymptotes sont donnés de même par

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_3^2}{a_2^2} + \frac{c_3^2}{c_2^2}\right) - \frac{y^2}{b_3^2}.$$

Donc, lorsque y croît λ diminue, c'est-à-dire que les asymptotes se rapprochent. Pour $y = y'_1$ la branche parasite s'évanouit au point O. Pour $y = y_1$ la courbe présente un point double en O, où les tangentes sont nécessairement parallèles aux asymptotes. On a alors la disposition de la *fig.* 2 *bis*.

Au delà de cette valeur, la courbe présente la disposition de la *fig.* 2 *ter*.

Fig. 2 *ter*.

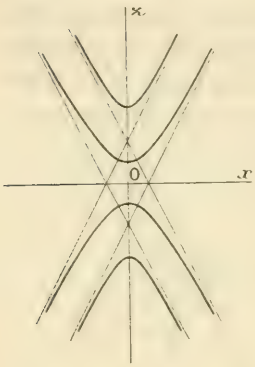
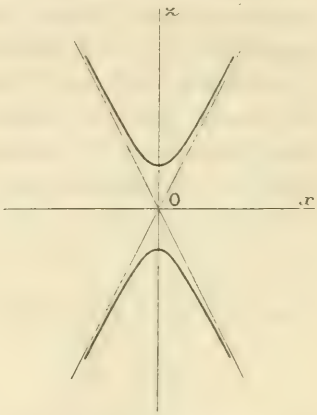


Fig. 2 *quater*.



Les asymptotes se confondent avant de devenir imaginaires pour la valeur y_0 de y qui annule λ, c'est-à-dire pour

$$y_0^2 = \frac{b_3^2}{2}\left(\frac{a_3^2}{a_2^2} + \frac{c_3^2}{c_2^2}\right),$$

ou, toutes réductions faites, pour

$$y_0^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}.$$

Or, si l'on prend l'équation de la section par Oyz mise sous la forme

$$\frac{z^4}{c_3^4} + 2z^2\left(\frac{y^2}{b_3^2 c_3^2} - \frac{1}{c_2^2}\right) + \frac{y^4}{b_3^4} - 2\frac{y^2}{b_2^2} + 1 = 0,$$

on voit que la condition de réalité des racines en z est

$$\left(\frac{y^2}{b_3^2 c_3^2} - \frac{1}{c_2^2}\right)^2 - \frac{1}{c_3^4}\left(\frac{y^4}{b_3^4} - 2\frac{y^2}{b_2^2} + 1\right) \geq 0,$$

ou, toutes réductions faites,

$$y^2 \leq \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}.$$

La section parallèle à Oxz tout entière devient donc imaginaire pour $y = y_0$. Autrement dit, le plan $y = y_0$ est un plan tangent singulier touchant la surface le long d'une courbe en laquelle doit se dédoubler la quartique précédente, puisqu'on passe à l'imaginaire, c'est-à-dire d'une hyperbole. On peut d'ailleurs le vérifier par le calcul. Si, en effet, on pose

$$U = \frac{y^4}{b_3^4} - 2\frac{y^2}{b_2^2} + 1,$$

on a, pour cette valeur particulière de y,

$$\frac{y^2}{b_3^2 c_3^2} - \frac{1}{c_2^2} = \frac{\sqrt{U}}{c_3^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{y^2}{a_3^2 b_3^2} - \frac{1}{a_2^2} = \frac{-\sqrt{U}}{a_3^2},$$

de sorte que l'équation de la courbe peut s'écrire

$$\left(\frac{x^2}{a_3^2} - \frac{z^2}{c_3^2}\right)^2 - 2x^2\frac{\sqrt{U}}{a_3^2} + 2z^2\frac{\sqrt{U}}{c_3^2} + U = 0.$$

ou

$$\left(\frac{x^2}{a_3^2} - \frac{z^2}{c_3^2} - \sqrt{U}\right)^2 = 0.$$

La disposition est donc celle de la *fig.* 2 *quater*, l'hyperbole étant prise en double.

Si $B = 0$, on a $y_0 = y_1$; le dédoublement de la courbe

en deux hyperboles a lieu en même temps que le passage de cette courbe par le point O (*fig.* 2 *bis*). Autrement dit, l'hyperbole de la *fig.* 2 *quater* dégénère en ses deux asymptotes. La surface a deux plans tangents singuliers parallèles à Oxz, la touchant chacun suivant un système de deux droites passant par un point Y_1.

Remarque. — Il est intéressant de définir le caractère géométrique de l'ellipsoïde donné lorsque la surface (N) présente cette singularité, c'est-à-dire lorsque

$$b^2 = ac.$$

Les normales aux sections cycliques données par

$$\frac{z}{x} = \pm \frac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{c\sqrt{a^2 - b^2}},$$

deviennent alors

$$\frac{z}{x} = \pm\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

Or, les points de l'ellipse où la normale fait le plus grand angle avec la normale correspondante au cercle principal, dont M. d'Ocagne a fait connaître de nombreuses propriétés sous le nom de *points de déviation maxima* (*N. A.*, 3e série, t. V, p. 370 et 534, 1886, et t. VII, p. 268; 1888), sont précisément tels que le coefficient angulaire de la normale y est égal à $\pm\sqrt{\frac{a}{c}}$. De là cette conséquence :

Les ellipsoïdes pour lesquels la surface (N) *présente la singularité signalée, à savoir de posséder deux couples de génératrices rectilignes singulières le long desquelles le plan tangent est le même, sont ceux dont les ombilics réels coïncident avec les points de déviation maxima de la section principale perpendiculaire à l'axe moyen.*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Questions 1793 et 1794.

(1898, p. 195-196.)

1793. *Si* S_2 *désigne un carré ou une somme de carrés tous différents entre eux, tout nombre entier est de la forme* $S_2 + p$ ($p = 0, 1, 2, 4$). (E. LEMOINE.)

1794. S_3 *représentant un cube ou une somme de cubes tous différents et* p_1 *l'un des nombres* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, *tout nombre entier est de la forme* $S_3 + p_1$, *au moins pour une valeur de* p_1. (E. LEMOINE.)

SOLUTION

Par M. L. RIPERT.

Démontrons d'abord le théorème suivant : *Tout nombre entier est de la forme* $S_n + p_1$, n *étant un nombre arbitrairement choisi,* S_n *représentant une* $n^{\text{ième}}$ *puissance ou somme de* $n^{\text{ièmes}}$ *puissances toutes différentes et* p *un nombre moindre que* $(n+1)^n - \Sigma_{\lambda=1}^{\lambda=n} \lambda^n$.

En effet, l'équation $2x^n - (x+1)^n = 0$ a une seule racine positive comprise entre n et $n+1$. Il en résulte que, a^n étant la plus grande $n^{\text{ième}}$ puissance contenue dans un nombre A, et en supposant $a > n$, on a toujours $A - a^n = B (< a^n)$. De même, et avec la même condition : $B - b^n = C (< b^n)$, $C - c^n = D (< c^n)$, ... Par suite :

$$A = a^n + b^n + c^n + \ldots + k^n + p,$$

avec $a > b > \ldots > k > n$, et $p < (n+1)^n$.

Les puissances $a^n_1 \ldots k^n$ sont donc toutes différentes, et une *limite supérieure* de p est $(n+1)^n - 1$.

Le plus petit nombre k étant au moins égal à $n+1$, on peut retrancher la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances moindres que $(n+1)^n$ et le *maximum* de p est $p_m = (n+1)^n - \Sigma_1^n \lambda^n - 1$.

C. Q. F. D.

La limite supérieure $[p = (n+1)^n - 1]$ suffit pour démontrer les théorèmes 1793 et 1794.

En effet, si $n = 2$, p ne peut dépasser $8 = 2^2 + 4$ (d'où $p_1 = 4$). On a ensuite

$$\begin{aligned}
p &= 7 = 1^2 + 2^2 + 2 && (p_1 = 2),\\
p &= 6 = 1^2 + 2^2 + 1 && (p_1 = 1),\\
p &= 5 = 1^2 + 2^2 && (p_1 = 0),\\
p &= 4 = 2^2 && (p_1 = 0),\\
p &= 3 = 1^2 + 2 && (p_1 = 2),\\
p &= 2,\\
p &= 1.
\end{aligned}$$

A cause de $8 = 2^2 + 4 = 1^2 + 2^2 + 3$, on peut remplacer $(p = 0, 1, 2, 4)$ par $(p = 0, 1, 2, 3)$.

Si $n = 3$, p ne peut dépasser $63 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 27$ (d'où $p_1 = 27$). On a ensuite :

$$\begin{aligned}
62 &= 2^3 + 3^3 + 27 && (p_1 = 27),\\
61 &= 1^3 + 3^3 + 33 && (p_1 = 33),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots,\\
56 &= 1^3 + 3^3 + 28 && (p_1 = 28),
\end{aligned}$$

et l'on reconnaît aisément que tous les nombres inférieurs sont de la forme $s_3 + p_1$, s_3 étant l'un ou la somme de deux ou trois des cubes $(1, 8, 27)$ et p_1 ayant l'une des valeurs inférieures à 28 indiquées par l'énoncé 1794. On peut, dans cet énoncé, retrancher de la suite p_1 les nombres 3, 11, 13, 15 qui ne sont pas indispensables à la décomposition des nombres inférieurs à 64. Enfin, à cause de $33 = 2^3 + 25$, ..., $28 = 2^3 + 20$, on peut adopter le maximum $p_m = 27$, à la condition de remplacer $(28, 29, 30, 31, 32, 33)$ par $(20, 21, 22, 23, 24, 25)$.

Pour $n = 4, 5, \ldots$, on a

$$\begin{aligned}
p &= 624, 7775, && \ldots,\\
p_m &= 270, 3350, && \ldots.
\end{aligned}$$

Autres solutions de M. Merlin.

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1900.

Errata.

Quelques erreurs s'étant glissées dans l'énoncé (p. 241), le lecteur est prié de faire les corrections ci-après :

2e ligne, page 241, *lire :* yOz, *au lieu de :* yOx.

5e ligne, même page, *lire :* passant par Ox, *au lieu de :* passant par Oz.

Dernière ligne, même page, *lire :* autour de Ox, *au lieu de :* autour de Oz.

Page 242, remplacer la rédaction de 3° par la suivante :

Quand le point M *décrit la section de la surface* (S) *par un plan* (P), *le point* μ *décrit une cubique* (Γ) *et quand le plan* (P) *varie, la cubique* (Γ) *passe par six points fixes qui sont les sommets d'un quadrilatère complet.*

[D5c]

SUR LE PRINCIPE DE DIRICHLET;

PAR M. DAVID HILBERT, de Göttingue.

Jahresbericht der D. M. V., Tome VIII, page 117; 1900.
Leipzig, Teubner, Ier fascicule (seul paru).

Le principe de Dirichlet est un mode de raisonnement que ce géomètre, inspiré par une pensée de Gauss, appliqua à la résolution d'un problème dit aujourd'hui *de Dirichlet* (*Randwertaufgabe*) [1]. Ce principe peut

[1] Le terme allemand *Randwertaufgabe* (problème consistant en la recherche de la fonction harmonique prenant des valeurs données sur un contour) correspond bien à la traduction : *Problème* de Dirichlet (*voir* maint endroit des deux premiers Volumes du *Traité d'Analyse* de M. Picard). Il semble bon alors de réserver exclusivement le mot *principe* au mode de raisonnement dont il s'agit. (L. L.)

être rapidement caractérisé comme il suit : En les points du contour donné dans le plan des x, y élevons des perpendiculaires et sur ces perpendiculaires portons les valeurs relatives au contour (*Randwerte* = valeurs que doit prendre la fonction harmonique cherchée sur le contour). Parmi les surfaces $z = f(x, y)$ limitées par les courbes de l'espace qui prennent ainsi naissance, supposons que l'on en cherche une pour laquelle la valeur de l'intégrale

$$J(f) = \int\int \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy$$

soit un minimum. Cette surface, ainsi qu'on le fait voir aisément à l'aide du Calcul des variations, est nécessairement une surface potentielle. C'est en recourant à une considération de cette espèce que Riemann [1] a regardé comme établie la démonstration de l'existence de la solution du problème de Dirichlet, et qu'il a ensuite, sans hésiter, établi sur cette base sa grandiose théorie des fonctions abéliennes.

Ce fut Weierstrass qui montra le premier que le mode de raisonnement du principe de Dirichlet ne peut être validement appliqué ici. En effet, si l'on se trouvait en présence d'un nombre fini de valeurs numériques, on pourrait immédiatement conclure que parmi elles il en est une minima; au contraire, si l'on est en présence de valeurs numériques en nombre illimité, il n'est aucunement nécessaire qu'il y en ait une plus petite que toutes les autres; bien plus, il faut prouver dans chaque cas par une démonstration particulière

---

[1] *Dissertation inaugurale*, § 16, et *Fonctions abéliennes*, Avant-Propos, p. III. *Comparer*, pour la critique du célèbre raisonnement de Riemann, le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, p. 38. (L. L.)

qu'il existe effectivement une surface $z = f(x, y)$ pour laquelle la valeur de l'intégrale correspondante $J(f)$ est un minimum.

Les importantes recherches de MM. C. Neumann, H.-A. Schwarz et H. Poincaré ont fait voir que, en adoptant certaines hypothèses très générales relatives à la nature du contour et aux valeurs qui s'y rapportent, le problème de Dirichlet est parfaitement résoluble, et que, réciproquement, l'existence de la fonction minima correspondante $f(x, y)$ est parfaitement établie.

Le principe de Dirichlet doit sa célébrité à l'attrayante simplicité de l'idée mathématique dont il tire naissance, à l'incomparable richesse des applications qu'on en peut faire en Mathématiques pures comme en Physique mathématique, et à la force de persuasion qu'il porte en soi. Mais, depuis la critique de Weierstrass, le principe de Dirichlet n'a plus eu qu'un intérêt historique et, comme méthode de résolution de problèmes de Dirichlet, il semble en tout cas délaissé. C'est avec des expressions de regret que M. C. Neumann dit que ce principe de Dirichlet, si beau et si souvent employé autrefois, est maintenant abandonné pour toujours. MM. Brill et Nöther [1] sont les seuls qui aient éveillé en nous un nouvel espoir en exprimant leur conviction que le principe de Dirichlet ressusciterait un jour, le même jusqu'à un certain point quant au fond, mais peut-être avec certaines modifications quant à la forme de l'exposition.

Ce qui suit est un essai de résurrection du principe de Dirichlet.

En réfléchissant que le problème de Dirichlet n'est qu'un problème particulier du Calcul des variations,

---

[1] Brill et Nöther, *Theorie der algebraischen Functionen* (*Jahresbericht der D. M. V.*, t. III, p. 265; 1894). Berlin, Reimer.

(L. L.)

nous arrivons à exprimer le principe de Dirichlet sous la forme plus générale suivante :

Tout problème du Calcul des variations possède une solution, pourvu que certaines hypothèses restrictives convenablement choisies relatives à la nature des conditions limitatives données soient remplies, et, nécessairement aussi, pourvu que ce que l'on entend par le mot solution *éprouve une généralisation conforme au sens, à la nature des choses.*

Ce principe peut servir de fil conducteur dans la recherche de démonstrations d'existence rigoureuses et simples; c'est ce que feront voir les deux exemples suivants :

1. *Sur une surface donnée* $z = f(x, y)$, *mener la ligne la plus courte entre deux points donnés* P et $P^{(1)}$.

Soit l la limite inférieure de la longueur de toutes les courbes passant par les deux points donnés sur la surface. Parmi toutes ces courbes de jonction, cherchons les courbes $C_1, C_2, C_3, \ldots$ dont les longueurs respectives $L_1, L_2, L_3, \ldots$ tendent vers la limite l. A partir de P, portons alors sur C_1 la longueur $\frac{1}{2}L_1$, nous obtiendrons ainsi un point $P_1^{(\frac{1}{2})}$; portons ensuite sur C_2, toujours à partir de P, la longueur $\frac{1}{2}L_2$ jusqu'en un point $P_2^{(\frac{1}{2})}$ et de même sur C_3 à partir de P la longueur $\frac{1}{2}L_3$ jusqu'en $P_3^{(\frac{1}{2})}$, et ainsi de suite. Les points $P_1^{(\frac{1}{2})}, P_2^{(\frac{1}{2})}, P_3^{(\frac{1}{2})}, \ldots$ auront alors comme point de condensation (*Verdichtungsstelle*) un certain point $P^{(\frac{1}{2})}$, $P^{(\frac{1}{2})}$ étant aussi un point de la surface $z = f(x, y)$.

L'opération susdite que nous avons faite sur les

points P et $P^{(1)}$, et qui nous a conduit à un point $P^{(\frac{1}{2})}$, appliquons-la aux points P et $P^{(\frac{1}{2})}$, ce qui nous conduira à un point $P^{(\frac{1}{4})}$ de la surface donnée. Nous trouverons encore de même un point $P^{(\frac{3}{4})}$ en appliquant le procédé en question aux points $P^{(\frac{1}{2})}$ et $P^{(1)}$. Nous obtiendrons enfin d'une manière analogue les points $P^{(\frac{1}{8})}$, $P^{(\frac{3}{8})}$, $P^{(\frac{5}{8})}$, $P^{(\frac{7}{8})}$, $P^{(\frac{1}{16})}$, ... Tous ces points et leurs points de condensation formeront sur la surface

$$z = f(x, y)$$

une courbe continue qui est la ligne géodésique cherchée.

Cette affirmation se démontre aisément, si l'on prend comme définition de la longueur d'une courbe la limite de la longueur des lignes brisées polygonales qui y sont inscrites. L'on reconnait en même temps qu'il suffit dans notre considération de la question d'admettre l'hypothèse que la fonction donnée $f(x, y)$ est continue ainsi que ses dérivées premières prises par rapport à x et à y.

II. *Trouver une fonction potentielle $z = f(x, y)$ prenant des valeurs assignées sur le contour d'une courbe donnée du plan des x, y.*

Pour simplifier, nous supposerons que le contour donné ait des tangentes et une courbure continues, et que la dérivée soit continue pour les valeurs assignées sur le contour. Considérons la courbe dans l'espace dont il a été parlé au commencement de cette Note, et déterminons alors un angle fixe φ lié tout particulièrement à cette courbe de l'espace par la propriété sui-

vante : $z = F(x, y)$ étant une surface analytique ou une surface formée de portions de surfaces analytiques, dont le contour est formé par la courbe de l'espace précitée, on peut toujours, à l'aide de $z = F(x, y)$, construire une surface $z = \hat{F}(x, y)$ telle que l'intégrale $J\left(\hat{F}\right)$ qui correspond à $z = \hat{F}(x, y)$ soit toujours inférieure ou égale en valeur à l'intégrale $J(F)$ qui correspond à $z = F(x, y)$ et que, en même temps, $z = \hat{F}(x, y)$ ne possède en aucun point une tangente dont l'angle avec le plan des x, y soit supérieur en grandeur à φ. On obtient un tel angle φ en considérant les points où la grandeur de l'inclinaison de la surface $z = F(x, y)$ sur le plan des x, y, c'est-à-dire la quantité

$$\text{arc tang}\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2},$$

ne surpasse pas une certaine limite, et en faisant voir que la surface $z = F(x, y)$ peut toujours, dans le voisinage de ces points, être remplacée par un morceau du plan

$$z = ax + by + c$$

ou (sur le contour) par un morceau de la surface potentielle en forme d'entonnoir

$$z = \frac{a(x - \alpha) + b(y - \beta)}{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} + c,$$

a, b, c, α, β étant des constantes telles que le plan ou les tangentes du morceau correspondant de la surface potentielle soient respectivement moins à pic par rapport au plan des x, y.

Soit i la limite inférieure des intégrales J relatives à toutes les surfaces dont le contour est formé par la

courbe de l'espace donnée. Parmi toutes ces surfaces cherchons les surfaces

$$z = F_1(x, y), \qquad z = F_2(x, y), \qquad z = F_3(x, y), \qquad \ldots,$$

pour lesquelles les intégrales correspondantes

$$J_1 = J(F_1), \qquad J_2 = J(F_2), \qquad J_3 = J(F_3), \qquad \ldots$$

tendent vers la limite i.

A cet effet, nous remplacerons chacune des surfaces

$$z = F_1, \qquad z = F_2, \qquad z = F_3, \qquad \ldots,$$

par les surfaces respectives

$$z = \widehat{F_1}, \qquad z = \widehat{F_2}, \qquad z = \widehat{F_3}, \qquad \ldots,$$

qui, en aucun point, n'ont une tangente dont l'angle avec le plan des x, y soit plus grand que l'angle φ.

De plus, cherchons maintenant parmi la suite infinie de fonctions $\widehat{F_1}$, $\widehat{F_2}$, $\widehat{F_3}$, ... une suite infinie de fonctions f_1, f_2, f_3, ... telle que pour tous les points x, y à l'intérieur du contour plan donné qui ont pour coordonnées x, y des nombres rationnels il existe une valeur limite

$$\underset{n=\infty}{\mathrm{L}} f_n(x, y).$$

Comme l'on a, d'autre part, pour tous les points à l'intérieur du contour,

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x} \right| < \operatorname{tang} \varphi, \qquad \left| \frac{\partial f_i}{\partial y} \right| < \operatorname{tang} \varphi \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

on en conclut aisément que la suite infinie de fonctions f_1, f_2, f_3, ... converge uniformément partout à l'intérieur du contour, et de même sur le contour, c'est-à-dire que

$$f(x, y) = \underset{n=\infty}{\mathrm{L}} f_n(x, y)$$

est une fonction continue des variables x, y.

La surface $z = f(x, y)$ est la surface potentielle cherchée. Il n'y a aucune difficulté à le démontrer; l'on y arrive le plus simplement en s'appuyant sur l'existence de la fonction minima, c'est-à-dire sur la solution du problème de Dirichlet pour le cercle et une fonction continue quelconque sur le contour; on peut aussi le démontrer directement.

Joint à la simplicité et à la clarté du mode de raisonnement que nous avons rapidement décrit, je vois encore l'avantage principal de cette nouvelle méthode dans le fait que l'on emploie seulement la propriété du minimum et que l'on ne fait aucun usage de la nature spéciale du problème, c'est-à-dire ici, par exemple, des propriétés particulières soit des lignes géodésiques, soit de la fonction potentielle. Le nouveau mode de raisonnement est donc applicable à des problèmes plus généraux de la théorie des surfaces ainsi que de la Physique mathématique.

(*Traduit par* L. Laugel.)

[12e]

SUR LES CONDITIONS DE DIVISIBILITÉ D'UN PRODUIT DE FACTORIELLES PAR UN AUTRE;

Par M. Edm. LANDAU,
Docteur en Philosophie, à Berlin.

INTRODUCTION.

On sait que le coefficient du binome

$$\binom{a}{b} = \frac{a(a-1)\ldots(a-b+1)}{1, 2, \ldots, b} = \frac{a!}{(a-b)!\,b!}$$

est un nombre entier pour tous les systèmes (a, b), pour

lesquels $a - b$ et b sont $\geqq 0$, le symbole $0!$ signifiant 1 par convention. Si l'on pose

$$a - b = x_1, \qquad b = x_2,$$

on obtient la fraction

$$\frac{(x_1 + x_2)!}{x_1!\,x_2!},$$

qui est entière pour tous les systèmes $(x_1, x_2) \geqq 0$. De même, le coefficient du polynome

$$\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)!}{x_1!\,x_2!\ldots x_r!}$$

est entier pour tous les systèmes $(x_1, x_2, \ldots, x_r) \geqq 0$ (1), ce qui se démontre au moyen de la proposition connue, que l'exposant dont le nombre premier p est affecté dans la factorielle $n!$, égale

$$(1) \qquad \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^\nu}\right] \quad (2),$$

formule où $[m]$ désigne le plus grand nombre entier non supérieur à m. Il est connu depuis longtemps que les coefficients du polynome sont des nombres entiers; car ils indiquent des nombres de permutations de $x_1 + \ldots + x_r$ éléments, parmi lesquels il s'en trouve x_1 égaux, x_2 autres égaux, etc.

En 1874, Catalan (3) publia un théorème auquel il

(1) *Voir*, par exemple, DIRICHLET-DEDEKIND, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4e édition, p. 28-29; 1894.

(2) La somme n'a qu'un nombre fini de termes, savoir $\left[\frac{\log n}{\log p}\right]$; cependant, comme $[m] = 0$ pour $0 < m < 1$, on peut l'étendre jusqu'à $\nu = \infty$.

(3) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIII, p. 207; 1874.

avait été conduit par la théorie des fonctions elliptiques : le quotient

$$\frac{2x_1!.2x_2!}{x_1!\,x_2!\,(x_1+x_2)!}$$

est entier pour tous les systèmes $(x_1, x_2) \geqq 0$. En s'appuyant sur la formule (1), M. Bourguet [1] démontre ce théorème d'une manière élémentaire [2], de même qu'une autre proposition plus générale : la fraction

$$\frac{(rx_1)!\,(rx_2)!\ldots(rx_r)!}{x_1!\,x_2!\ldots x_r!\,(x_1+x_2+\ldots+x_r)!}$$

est entière pour tous les systèmes $(x_i) \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Dans ce qui suit, il s'agit de ce problème : Étant données $m+n$ fonctions linéaires et homogènes de r variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$, à coefficients entiers,

$$u_\sigma = \alpha_1^{(\sigma)}x_1 + \ldots + \alpha_r^{(\sigma)}x_r = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{(\sigma)}x_i \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, m),$$

$$v_\tau = \beta_1^{(\tau)}x_1 + \ldots + \beta_r^{(\tau)}x_r = \sum_{i=1}^{r} \beta_i^{(\tau)}x_i \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, n),$$

trouver les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles les $(m+n)r$ coefficients $\alpha_i^{(\sigma)}$, $\beta_i^{(\tau)}$ doivent satisfaire, pour que la fraction

$$\frac{(\alpha_1^{(1)}x_1+\ldots+\alpha_r^{(1)}x_r)!\ldots(\alpha_1^{(m)}x_1+\ldots+\alpha_r^{(m)}x_r)!}{(\beta_1^{(1)}x_1+\ldots+\beta_r^{(1)}x_r)!\ldots(\beta_1^{(n)}x_1+\ldots+\beta_r^{(n)}x_r)!} = \frac{u_1!\,u_2!\ldots u_m!}{v_1!\,v_2!\ldots v_n!},$$

soit égale à un nombre entier, pour tout système x_1, $x_2, \ldots, x_r$ qui donne aux $m+n$ fonctions u_σ, v_τ des valeurs $\geqq 0$ [3].

---

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIV, p. 89-90; 1875.

(2) *Voir* aussi Bachmann, *Zahlentheorie*, Ire Partie, p. 37-39.

(3) Pour des valeurs négatives, les factorielles n'auraient pas de sens.

I.

Pour que le produit $\prod_{\sigma} u_\sigma!$ soit divisible par $\prod_{\tau} v_\tau!$, il faut et il suffit que chaque nombre premier p divise le numérateur au moins autant de fois que le dénominateur; on a donc à étudier l'inégalité

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{u_1}{p^\nu}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{u_2}{p^\nu}\right]+\ldots+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{u_m}{p^\nu}\right]$$
$$\geqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{v_1}{p^\nu}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{v_2}{p^\nu}\right]+\ldots+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{v_n}{p^\nu}\right],$$

c'est-à-dire

$$(2)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{p^\nu}\right]\geqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{p^\nu}\right],$$

qui doit subsister pour tous les systèmes entiers $x_1, \ldots, x_r$ pour lesquels les u_σ et v_τ sont $\geqq 0$, et pour tout nombre premier p.

Dans les cas spéciaux mentionnés dans l'Introduction [1], on s'est servi des inégalités correspondant à (2) pour les systèmes spéciaux de coefficients $(\alpha_i^{(\sigma)}, \beta_i^{(\tau)})$. En ce qui concerne le coefficient du polynome, on a dû montrer que, pour tous les $x_1, \ldots, x_r \geqq 0$ et pour tout nombre premier p,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_1+\ldots+x_r}{p^\nu}\right]\geqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_1}{p^\nu}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_2}{p^\nu}\right]+\ldots+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_r}{p^\nu}\right];$$

---

[1] *Voir* aussi plusieurs Mémoires de M. Désiré André (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XI, p. 314; t. XII, p. 84; t. XIII, p. 185. — *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 84).

pour l'expression considérée par M. Bourguet

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{rx_1}{p^\nu}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{rx_2}{p^\nu}\right]+\ldots+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{rx_r}{p^\nu}\right]$$

$$\geqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_1}{p^\nu}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_2}{p^\nu}\right]+\ldots+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_r}{p^\nu}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x_1+x_2+\ldots+x_r}{p^\nu}\right].$$

La démonstration de ces inégalités se fait en établissant que, pour chaque nombre d, donc, *a fortiori*, pour $d=p^\nu$, on a

$$\left[\frac{x_1+\ldots+x_r}{d}\right]\geqq\left[\frac{x_1}{d}\right]+\ldots+\left[\frac{x_r}{d}\right],$$

$$\left[\frac{rx_1}{d}\right]+\ldots+\left[\frac{rx_r}{d}\right]\geqq\left[\frac{x_1}{d}\right]+\ldots+\left[\frac{x_r}{d}\right]+\left[\frac{x_1+\ldots+x_r}{d}\right];$$

et d'une inégalité de la forme

$$f(\nu)\geqq g(\nu), \tag{3}$$

on déduit ensuite, *a fortiori*,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}f(\nu)\geqq\sum_{\nu=1}^{\infty}g(\nu). \tag{4}$$

Il peut arriver, inversement, que, pour un certain système $(x_1, \ldots, x_r, p)$, on ait, pour un ν_0 déterminé,

$$\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{p^{\nu_0}}\right]<\sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{p^{\nu_0}}\right], \tag{5}$$

et pourtant

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{p^\nu}\right]\geqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{p^\nu}\right], \tag{2}$$

vu que le sens d'une inégalité contenant la fonction $[x]$

$$[a_1]+\ldots+[a_m]<[b_1]+\ldots+[b_n].$$

où les a, b sont des nombres fractionnaires, peut se renverser en multipliant tous les arguments a_σ, b_τ par une même constante k.

Mais, ce qu'on n'a pas remarqué jusqu'ici, c'est que l'existence de la relation

$$\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{p^\nu}\right] \geqq \sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{p^\nu}\right]$$

pour tous les systèmes (x_i, p, ν), est non seulement suffisante, mais aussi nécessaire pour que la condition (2) soit remplie pour tous les systèmes $(x_1, \ldots, x_r, p)$. Il est vrai que (5) n'entrainerait pas nécessairement que, pour le nombre p en question, l'inégalité (2) ne soit pas satisfaite; mais, et c'est la marche suivie dans la démonstration qui forme l'objet du n° II, en supposant qu'il existe un système $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ et une puissance P d'un nombre premier [1], pour lesquels

$$(6) \qquad \sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{\sigma}\right] < \sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{\sigma}\right],$$

je montrerai qu'on pourrait en déduire un autre système $(y_1, y_2, \ldots, y_r, p)$, pour lequel

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{p^\nu}\right] < \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{p^\nu}\right],$$

et j'aurai démontré ainsi la proposition suivante :

Pour que l'inégalité (2) subsiste identiquement, il faut qu'on ait identiquement

$$\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\frac{u_\sigma}{p^\nu}\right] \geqq \sum_{\tau=1}^{n}\left[\frac{v_\tau}{p^\nu}\right] \quad [2].$$

---

[1] P peut signifier, du reste, une grandeur positive quelconque, rationnelle ou irrationnelle.

[2] Vulgairement parlant, il est permis de différentier l'inégalité (2).

II.

Les u_σ, v_τ étant des fonctions homogènes et linéaires des x_i, on a

$$u_\sigma(\rho x_1, \ldots, \rho x_r) = \rho u_\sigma(x_1, \ldots, x_r),$$
$$v_\tau(\rho x_1, \ldots, \rho x_r) = \rho v_\tau(x_1, \ldots, x_r).$$

[Si ρ est positif, les $u_\sigma(\rho x_i)$ [1] et $v_\tau(\rho x_i)$ seront $\gtreqless 0$ en même temps que les $u_\sigma(x_i)$, $v_\tau(x_i)$]. On a donc, en posant

$$U_\sigma = u_\sigma(\rho \xi_i),$$
$$V_\tau = v_\tau(\rho \xi_i),$$

et en introduisant ces expressions dans (6),

$$(7) \qquad \sum_{\sigma=1}^{m} \left| \frac{U_\sigma}{\rho P} \right| = \sum_{\tau=1}^{n} \left| \frac{V_\tau}{\rho P} \right|.$$

Ayant une fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\alpha, \beta > 0)$ on peut multiplier ses deux termes par un nombre positif ρ tel que le numérateur devienne plus petit que la deuxième puissance du dénominateur diminué de β. Car, pour

$$\rho = \frac{\alpha + 2\beta^2}{\beta^2},$$

on a, comme on le vérifie facilement,

$$\rho\alpha < (\rho\beta - \beta)^2.$$

Si plusieurs fractions

$$\frac{\alpha_1}{\beta}, \quad \frac{\alpha_2}{\beta}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_\tau}{\beta}$$

sont données, on obtient, en multipliant les deux

---

[1] $u_\sigma(\rho x_i)$ signifie $u_\sigma(\rho x_1, \ldots \rho x_r) \ldots$

termes de chacune par un nombre supérieur aux t nombres $\frac{\alpha\mu + 2\beta^2}{\beta^2}$, des fractions où le numérateur de chacune est inférieur à la deuxième puissance du dénominateur diminuée du dénominateur primitif. Il existe donc un nombre ρ_1 tel que pour tout $\rho > \rho_1$,

$$U_\sigma < (\rho P - P)^2 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, m),$$

et

$$V_\tau < (\rho P - P)^2 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, n).$$

Si y, en augmentant, passe par une valeur entière N, la fonction discontinue (y) augmente de 1. Comme, pour N elle-même,

$$(y) = N,$$

on voit que, y étant une valeur quelconque, on peut trouver une grandeur positive ε différente de 0, telle que pour $0 \leqq h < \varepsilon$,

$$(y + h) = (y).$$

En effet, il suffit de prendre

$$\varepsilon = (y) + 1 - y,$$

expression positive pour tous les y. De même, une fraction $\frac{\alpha}{\beta}$ étant donnée, on peut trouver un nombre positif δ tel que pour $0 < k < \delta$,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta - k}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

D'après ce qui précède, en posant

$$y = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad y + h = \frac{\alpha}{\beta - k},$$

il suffit de prendre

$$\frac{\alpha}{\beta - \delta} - \frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1 - \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \delta = \beta - \frac{\alpha}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1},$$

grandeur toujours plus grande que 0.

Donc, une grandeur positive d étant donnée, on peut trouver un nombre ρ_1 tel que, pour tous les $\rho > \rho_1$,

$$\left(\frac{\rho\alpha}{\rho\beta - d}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \quad (^1).$$

En effet, il suffit pour cela que

$$\frac{d}{\rho_1} = \beta - \frac{\alpha}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1}.$$

Donc, t fractions $\frac{\alpha_1}{\beta}, \frac{\alpha_2}{\beta}, \ldots, \frac{\alpha_\tau}{\beta}$ étant données, on peut choisir un nombre ρ_2 tel que pour $\rho > \rho_2$,

$$\left(\frac{\rho\alpha_1}{\rho\beta - d}\right) = \left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right), \qquad \ldots, \qquad \left(\frac{\rho\alpha_\tau}{\rho\beta - d}\right) = \left(\frac{\alpha_\tau}{\beta}\right),$$

relation où d désigne une grandeur positive donnée.

En posant $\beta = d = p$, et en tenant compte des considérations auxiliaires présentées plus haut, on obtient cette proposition : Il existe un nombre ρ_3 tel que pour

$$\rho > \rho_3,$$

$$(1) \qquad U_\sigma < (\rho P - P)^2, \qquad V_\tau < (\rho P - P)^2;$$

a fortiori donc pour $q < P$,

$$U_\sigma < (\rho P - q)^2, \qquad V_\tau < (\rho P - q)^2;$$

$$(2) \qquad \left(\frac{U_\sigma}{\rho P - P}\right) = \left(\frac{U_\sigma}{\rho P}\right), \qquad \left(\frac{V_\tau}{\rho P - P}\right) = \left(\frac{V_\tau}{\rho P}\right);$$

a fortiori donc

$$\left(\frac{U_\sigma}{\rho P - q}\right) = \left(\frac{U_\sigma}{\rho P}\right), \qquad \left(\frac{V_\tau}{\rho P - q}\right) = \left(\frac{V_\tau}{\rho P}\right).$$

---

(1) Il n'est pas toujours possible de déterminer ρ suffisamment grand pour que

$$\left(\frac{\rho\alpha}{\rho b + d}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right);$$

car, dans le cas où $\frac{\alpha}{\beta}$ est entier, cette équation n'est jamais satisfaite.

Or,

$$\rho P - q \qquad (\rho = 1, 2, 3, \ldots; 0 < q < P)$$

parcourt toutes les grandeurs positives. Il existe donc, en désignant par p un nombre premier quelconque supérieur à $\rho_3 P - P$, un nombre premier p tel que

$$(1) \qquad U_\sigma < p^2, \qquad V_\tau < p^2,$$

$$(2) \qquad \left(\frac{U_\sigma}{\rho P}\right) = \left(\frac{U_\sigma}{p}\right), \qquad \left(\frac{V_\tau}{\rho P}\right) = \left(\frac{V_\tau}{p}\right),$$

De

$$\sum_{\sigma=1}^{m} \left(\frac{U_\sigma}{\rho P}\right) < \sum_{\tau=1}^{n} \left(\frac{V_\tau}{\rho P}\right),$$

il s'ensuit donc que, dans les sommes $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{U_\sigma}{p^\nu}\right)$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{V_\tau}{p^\nu}\right)$, tous les termes, excepté les premiers, s'évanouissent; on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{m} \left(\frac{U_\sigma}{p^\nu}\right) < \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\tau=1}^{n} \left(\frac{V_\tau}{p^\nu}\right),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{m} \left[\frac{u_\sigma(\rho\xi_t)}{p^\nu}\right] < \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\tau=1}^{n} \left[\frac{v_\tau(\rho\xi_t)}{p^\nu}\right],$$

et la proposition énoncée plus haut est démontrée.

III.

On en conclut, en posant

$$\frac{z_1}{P} = v_1, \qquad \frac{z_2}{P} = v_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{z_g}{P} = v_g,$$

la proposition suivante :

Pour que la fraction

$$\frac{u_1!\, u_2! \ldots u_m!}{v_1!\, v_2! \ldots v_n!}$$

se réduise, pour tous les systèmes (x_i) tels que

$$u_\sigma \geqq 0, \qquad v_\tau \leqq 0 \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, m \\ \tau = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

à un nombre entier, il faut et il suffit que l'inégalité

$$(8) \qquad \sum_{\sigma=1}^{m} [u_\sigma(y_i)] \geqq \sum_{\tau=1}^{n} [v_\tau(y_i)]$$

soit vérifiée pour tous les systèmes commensurables [1] de grandeurs réelles (y_i), pour lesquels les u_σ et v_τ sont $\geqq 0$.

La restriction que les y sont commensurables peut aussi être écartée. En effet, supposons que, pour un système réel quelconque (y_i) pour lequel les u_σ et v_τ sont $\geqq 0$, on ait

$$\sum_{\sigma=1}^{m} [u_\sigma(y_i)] < \sum_{\tau=1}^{n} [v_\tau(y_i)].$$

D'après les considérations précédentes, on peut trouver une grandeur positive δ telle que pour

$$0 \leqq h_i < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

$$\left[\frac{u_\sigma(y_i)}{1 - h_i}\right] = [u_\sigma(y_i)], \quad \left[\frac{v_\tau(y_i)}{1 - h_i}\right] = [v_\tau(y_i)] \quad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, m \\ \tau = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\left[u_\sigma\left(\frac{y_i}{1 - h_i}\right)\right] = [u_\sigma(y_i)], \qquad \left[v_\tau\left(\frac{y_i}{1 - h_i}\right)\right] = [v_\tau(y_i)],$$

$$\sum_{\sigma=1}^{m} \left[u_\sigma\left(\frac{y_i}{1 - h_i}\right)\right] = \sum_{\sigma=1}^{m} [u_\sigma(y_i)] < \sum_{\tau=1}^{n} [v_\tau(y_i)]$$

$$= \sum_{\tau=1}^{n} \left[v_\tau\left(\frac{y_i}{1 - h_i}\right)\right],$$

---

[1] C'est-à-dire tels qu'il existe un nombre pour lequel $y_1 P = x_1, \ldots, y_r P = x_r$, soient entiers.

et l'on peut choisir les h_i entre o et δ, tels que les r nombres

$$\eta_i = \frac{y_i}{1 - h_i}$$

soient commensurables ou même rationnels avec une puissance d'un nombre premier comme dénominateur commun : une contradiction avec la proposition trouvée plus haut se présenterait donc ; on a, par conséquent, cet énoncé : L'existence de l'inégalité

$$(8) \qquad \sum_{\sigma=1}^{m} [u_\sigma(y_i)] \leqq \sum_{\tau=1}^{n} [v_\tau(y_i)],$$

pour tous les systèmes réels (y_i) tels que les u_σ, v_τ sont $\geqq$ o, est une condition nécessaire et suffisante pour que le quotient de factorielles considéré soit entier.

IV.

Soit maintenant (y_i) une solution quelconque de (8) $(u_\sigma, v_\tau \geqq 0)$ et (η_i) une autre $(u_\sigma, v_\tau \geqq 0)$, dont les éléments sont tous entiers et différents de o. Dans

$$\sum_{\sigma=1}^{m} [u_\sigma(\eta_i)] \quad \sum_{\tau=1}^{n} [v_\tau(\eta_i)],$$

on peut, tous les arguments étant entiers, omettre les crochets. En multipliant par un nombre entier et positif k, on a donc

$$\sum_{\sigma=1}^{m} u_\sigma(k\eta_i) \quad \sum_{\tau=1}^{n} v_\tau(k\eta_i),$$

et en ajoutant à

$$\sum_{\sigma=1}^{m} [u_\sigma(y_i)] \quad \sum_{\tau=1}^{n} [v_\tau(y_i)].$$

vu que, pour b entier,

$$(a) \div b = (a - b),$$

on obtient

$$\sum_{\sigma=1}^{m} [u_\sigma(y_i + k\tau_{ri})] = \sum_{\tau=1}^{n} [v_\tau(y_i - k\tau_{ri})].$$

De là cet énoncé : Si l'inégalité (8) est exacte pour tous les systèmes (y_i) tels que y_i parcourt les valeurs comprises entre deux multiples consécutifs $h_i\tau_{ri}$, $(h_i+1)\tau_{ri}$ de τ_{ri}, elle l'est pour tous les systèmes (y_i) de la forme

$$y_i = h_i\tau_{ri} - \delta_i\tau_{ri} + k\tau_{ri} \qquad (0 < \delta_i < 1,\ k \text{ entier et} > 0),$$

c'est-à-dire pour tous les $y_i > h_i\tau_{ri}$, si $\tau_{ri} > 0$ et $< h_i\tau_{ri}$, si $\tau_{ri} < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Je suppose maintenant que les u_σ, v_τ sont $\geqq 0$ pour tous les arguments qui sont $\geqq 0$. Les coefficients seront alors tous $\geqq 0$; car si, par exemple, α_i^σ était négatif, on aurait, pour

$$x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0, \qquad x_i = 1,$$
$$u_i^\sigma < 0.$$

Les considérations précédentes permettent de démontrer le théorème suivant :

Pour que

$$\frac{(\alpha_1^{(1)}x_1 + \ldots + \alpha_r^{(1)}x_r)! \ldots (\alpha_1^{(m)}x_1 + \ldots + \alpha_r^{(m)}x_r)!}{(\beta_1^{(1)}x_1 + \ldots + \beta_r^{(1)}x_r)! \ldots (\beta_1^{(n)}x_1 + \ldots + \beta_r^{(n)}x_r)!} \qquad (\alpha_i^\sigma \geqq 0,\ \beta_i^\tau \geqq 0)$$

soit entier pour tous les systèmes entiers $(x_i) \geqq 0$, *il faut et il suffit que l'inégalité*

$$(8) \qquad \begin{aligned} &[\alpha_1^{(1)}y_1 + \ldots + \alpha_r^{(1)}y_r] + \ldots + [\alpha_1^{(m)}y_1 + \ldots + \alpha_r^{(m)}y_r] \\ &\geqq [\beta_1^{(1)}y_1 + \ldots + \beta_r^{(1)}y_r] + \ldots + [\beta_1^{(n)}y_1 + \ldots + \beta_r^{(n)}y_r] \end{aligned}$$

subsiste pour tous les systèmes réels (y_i) *entre* 0 *et* 1 (*inclusivement*).

Démonstration. — Si le quotient de factorielles en question est entier pour tous les systèmes entiers $(x_i) \geqq 0$, l'inégalité (8) est exacte pour tous les systèmes $\geqq 0$ et réciproquement. Ceci n'est pas une conséquence du théorème général établi à la fin de (III) [1], mais se démontre littéralement de la même manière, en se bornant dès le commencement aux systèmes positifs ; car le système $(\rho\xi_i)$, qu'on a déduit (II) de (ξ_i) et qui ne satisferait pas à (2) est $\geqq 0$ en même temps que (ξ_i).

1. Si le quotient en question est entier pour tous les $(x_i) \geqq 0$, l'inégalité (8) sera donc, *a fortiori*, exacte pour tous les (y_i) entre 0 et 1.

2. Réciproquement, supposons que tous les systèmes (y_i) entre 0 et 1 satisfassent à (8). En posant

$$y_1 = \ldots = y_{i-1} = y_{i+1} = \ldots = y_n = 0, \qquad y_i = 1,$$

on a

$$\alpha_i^{(1)} + \ldots + \alpha_i^{(m)} = \beta_i^{(1)} + \ldots + \beta_i^{(n)},$$

$$\sum_{\sigma=1}^{m} \alpha_i^{\sigma} = \sum_{\tau=1}^{n} \beta_i^{\tau} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r);$$

donc, $k_1, \ldots, k_r$ désignant des nombres entiers quelconques $\geqq 0$,

$$\sum_{\sigma=1}^{m} \alpha_i^{\sigma} k_i = \sum_{\tau=1}^{n} \beta_i^{\tau} k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

$$\sum_{\sigma=1}^{m} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^{\sigma} k_i = \sum_{\tau=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \beta_i^{\tau} k_i.$$

---

[1] Dans le cas où il y a, pour chaque variable, au moins un u_τ ou v_τ qui ne contient qu'elle seule, ces deux théorèmes sont identiques, car les u_τ, v_τ ne sauraient être tous $= 0$ sans que les x_i le soient aussi.

et en ajoutant cette inégalité à (8), pour tous les systèmes (y_i) entre 0 et 1,

$$\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^{\sigma}k_i-\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^{\sigma}y_i\right)\right]$$
$$\sum_{\tau=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{r}\beta_i^{\tau}k_i-\left(\sum_{i=1}^{r}\beta_i^{\tau}y_i\right)\right].$$

d'où, comme les sommes $\sum_i \alpha_i^{\sigma}k_i$ et $\sum_i \beta_i^{\tau}k_i$ représentent des nombres entiers,

$$\sum_{\sigma=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^{\sigma}(k_i+y_i)\right]\ \sum_{\tau=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{r}\beta_i^{\tau}(k_i+y_i)\right];$$

or, chaque grandeur positive est de la forme k_i+y_i, où k_i est entier et $0\leqq y_i<1$. Donc, l'inégalité (8) reste vraie pour tous les systèmes $(y_i)\geqq 0$. Donc, le quotient $\dfrac{\prod_{\sigma} u_{\sigma}!}{\prod_{\tau} v_{\tau}!}$ est entier pour tous les (x_i) entiers $\geqq 0$, ce qu'il fallait démontrer.

V.

Pour appliquer le théorème trouvé, je traiterai, dans un cas spécial, le problème qui consiste, étant donnés les nombres m, n, r et les coefficients $\beta_i^{\tau}\begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,r \\ \tau=1,2,\ldots,n\end{pmatrix}$ du dénominateur, à trouver tous les systèmes $\alpha_i^{(\sigma)}$ tels que le quotient $\dfrac{u_1!\ldots u_m!}{v_1!\ldots v_n!}$ soit identiquement entier. Il est évident que, si un système $(\alpha_i^{(\sigma)})$ satisfait aux condi-

tions exigées et qu'on augmente un ou plusieurs des $\alpha_i^{(\sigma)}$, le nouveau système y satisfera *a fortiori*. On n'a donc qu'à déterminer tous les systèmes, *indépendants* $(\alpha_i^{(\sigma)})$, pour lesquels :

1. $\prod_\sigma u_\sigma!$ est divisible par $\prod_\tau v_\tau!$

2. On ne peut diminuer aucun des coefficients positifs de 1 sans que cette divisibilité cesse.

Soit

$$m = 2, \qquad n = 3, \qquad r = 2,$$

$$\beta_1^{(1)} = 1, \qquad \beta_2^{(1)} = 0, \qquad \beta_1^{(2)} = 0, \qquad \beta_2^{(2)} = 1,$$
$$\beta_1^{(3)} = 2, \qquad \beta_2^{(3)} = 1, \qquad \beta_1^{(4)} = 1, \qquad \beta_2^{(4)} = 2.$$

Il s'agit donc de trouver tous les nombres entiers ≥ 0 a, b, c, d tels que pour $0 < x < 1$, $0 < y < 1$

$$(9) \qquad \begin{cases} [ax + by] + [cx + dy] \\ [x] + [y] + [2x + y] + [x + 2y]. \end{cases}$$

$x = 1$, $y = 0$ donne

$$(10) \qquad a + c \geq 4;$$

$x = 0$, $y = 1$ donne

$$(11) \qquad b + d \geq 4$$

comme conditions nécessaires.

Pour $x = 1$, $y = 1$, l'inégalité (9) est donc satisfaite. Pour $x = 1$, $y < 1$, (9) prendra la forme

$$a + c + [by] + [dy] \geq 4 + [2y],$$

conséquence immédiate de (10) et (11), un des nombres b et d, au moins, devant être, à cause de (11), ≥ 2. De même $x < 1$, $y = 1$ ne donnera aucune nouvelle condition. Comme, pour $x < 1$ et $y < 1$, $[x]$ et $[y]$ sont 0,

on est donc ramené aux inégalités

$$(10) \qquad a + c \leqq 4,$$

$$(11) \qquad b + d \leqq 4,$$

$$(12) \qquad [ax + by] + [cx + dy] + [2x + y] + [x + 2y]$$
$$(0 < x < 1,\ 0 < y < 1).$$

Pour parvenir à leur résolution, il y a lieu de trouver d'abord tous les systèmes a, b, c, d pour lesquels elles sont satisfaites pour

$$0 < x < y < 1.$$

Après cela, un changement de lettres donnera ceux qui satisfont aux inégalités pour

$$0 < y < x < 1;$$

et l'on aura à conserver tous les systèmes appartenant à la fois à ces deux groupes.

En faisant augmenter x et y, le deuxième membre de (12) n'augmente que si l'une des expressions $2x + y$, $x + 2y$ passe par une valeur entière; il faut et il suffit donc (en se bornant à $x < y$) que, outre (10) et (11),

$$[ax + by] + cx + dy] \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ pour } x + 2y = 1 \\ 2 \text{ pour } 2x + y = 1 \\ 3 \text{ pour } x + 2y = 2 \\ 4 \text{ pour } 2x + y = 2 \end{array} \right\} (0 < x < y < 1).$$

En éliminant x de la première de ces inégalités et de la troisième, y des deuxième et quatrième et en posant ensuite, respectivement, y et $x = \mathfrak{I}$, on obtient, outre (10) et (11),

$$(13) \qquad a + c + [(b - 2a)\mathfrak{I}] + [(d - 2c)\mathfrak{I}] \quad 1 \text{ pour } \tfrac{1}{3} < \mathfrak{I} < \tfrac{1}{2},$$

$$(14) \qquad b + d + [(a - 2b)\mathfrak{I}] + [(c - 2d)\mathfrak{I}] \quad 2 \text{ pour } 0 < \mathfrak{I} < \tfrac{1}{3},$$

$$(15) \qquad 2a + 2c + [(b - 2a)\mathfrak{I}] + [(d - 2c)\mathfrak{I}] \quad 3 \text{ pour } \tfrac{2}{3} < \mathfrak{I} < 1,$$

$$(16) \qquad 2b + 2d + [(a - 2b)\mathfrak{I}] + [(c - 2d)\mathfrak{I}] \quad 4 \text{ pour } \tfrac{1}{2} < \mathfrak{I} < \tfrac{2}{3}.$$

La discussion de ces quatre inégalités donne le résultat suivant : elles sont satisfaites pour tout système vérifiant (11) et (12), à l'exception de

$$a = 3, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad d = 4,$$

et

$$a = 1, \quad b = 4, \quad c = 3, \quad d = 0.$$

En opérant maintenant suivant les indications qui viennent d'être données, on obtient, comme solution générale du problème proposé, le résultat que voici.

a, b, c, d sont respectivement supérieurs ou égaux à l'un des quatre systèmes 3, 0, 1, 5 : 1, 5, 3, 0 ; 0, 3, 5, 1 ; 5, 1, 3, 0 ou à l'un des $5.5 - 4 = 21$ systèmes a, b, c, d pour lesquels

$$a + c = 4, \quad b + d = 4 \quad (a, b, c, d \neq 0)$$

(mais où a, b, c, d ne sont pas respectivement égaux à un des quatre systèmes 3, 0, 1, 4 : 1, 4, 3, 0 ; 0, 3, 4, 1 ; 4, 1, 3, 0).

La plupart de ces 25 solutions (parmi lesquelles il n'y en a que 9 qui soient différentes entre elles, vu les changements permis de lettres) ne disent rien de nouveau ; en effet, il est évident que $(ax + by)!(cx + dy)!$ est divisible par $x!\,y!\,(2x - y)!\,(x - 2y)!$, si $ax + by$ est la somme de une, de deux, de trois ou de toutes les quantités x, y, $2x - y$, $x - 2y$ ou égal à 0, tandis que $cx + dy$ est la somme de celles qui ne sont pas contenues dans $ax + by$; car le quotient de factorielles considéré est alors le produit de deux coefficients du polynome, donc entier. Cela donne déjà 15 systèmes indépendants.

Ensuite, par le théorème de Catalan cité dans l'Introduction, $(4x + 2y)!\,(2y)!$ est divisible par

$$(2x + 1)!\,(2x + 2y + 1)!$$

a fortiori donc par $2x+y!\,y!\,x!\,x+2y!$ Ceci donne, en échangeant x et y ou les deux factorielles entre elles, quatre solutions. Il reste six solutions, dont deux sont essentiellement différentes. La première est $5x+y!\,3y!$ Le second théorème, que

$$\frac{(x!\,4y!}{x!\,y!\,(2x+y)!\,(x-2y)!}$$

est entier pour tous les x, $y \geqq 0$, est intéressant à deux points de vue : d'abord, en ce que la fraction est symétrique en x et y; et puis, en ce que la somme des coefficients de son numérateur est pour chaque variable aussi petite que possible, savoir égale à celle des coefficients du dénominateur.

[M²41]

SUR LA SURFACE DE L'ONDE ET LA SURFACE CORRESPONDANTE D'ÉLASTICITÉ;

PAR M. E. LACOUR,

Professeur-adjoint à l'Université de Nancy.

---

1. La surface de l'onde et la surface correspondante d'élasticité peuvent être définies en même temps de la façon suivante :

Étant donné un trièdre trirectangle Oxyz, *on considère trois cercles* (A), (B), (C) *situés respectivement dans les faces* yOz, zOx, xOy *et ayant pour centre commun le sommet* O *du trièdre; par chacun de ces cercles on fait passer une sphère et l'on suppose que ces trois sphères varient de façon que,* P *et* M *étant leurs deux points communs,* OP *reste perpendiculaire*

sur PM : le lieu du point M est la surface de l'onde, le lieu du point P est la surface correspondante d'élasticité.

Pour obtenir les équations de ces surfaces, prenons le trièdre Oxyz comme trièdre de coordonnées. Soient

α et l le rayon du cercle (A) et l'x du centre de la sphère correspondante;
β et m, γ et n les quantités analogues relatives aux cercles (B) et (C);
x, y, z, r les coordonnées du point M et la longueur OM;
ξ, η, ζ, ρ les coordonnées du point P et la longueur OP.

On a d'abord les relations

$$r^2 - \alpha^2 = 2lx, \qquad \rho^2 - \alpha^2 = 2l\xi,$$
$$r^2 - \beta^2 = 2my, \qquad \rho^2 - \beta^2 = 2m\eta,$$
$$r^2 - \gamma^2 = 2nz, \qquad \rho^2 - \gamma^2 = 2n\zeta,$$

puis, en remarquant que le plan passant par les centres des trois sphères est perpendiculaire à PM et passe par le milieu de PM, on trouve qu'on doit avoir

$$\frac{x}{2l} + \frac{y}{2m} + \frac{z}{2n} = 1,$$
$$\frac{\xi}{l} + \frac{\eta}{m} + \frac{\zeta}{n} = 0;$$

enfin, en remplaçant dans ces relations l, m, n par leurs valeurs en fonction de x, y, z d'une part, en fonction de ξ, η, ζ d'autre part, on obtient les équations

$$\frac{x^2}{r^2-\alpha^2} + \frac{y^2}{r^2-\beta^2} + \frac{z^2}{r^2-\gamma^2} = 1 \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2),$$
$$\frac{\xi^2}{\rho^2-\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\rho^2-\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\rho^2-\gamma^2} = 0 \qquad (\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2);$$

la première représente la surface de l'onde, et la deuxième, la surface correspondante d'élasticité.

On voit de plus que la correspondance entre les deux points M et P est définie par les relations

$$(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{r^2 - \alpha^2} &= \frac{\xi}{\rho^2 - \alpha^2}, \\ \frac{y}{r^2 - \beta^2} &= \frac{\eta}{\rho^2 - \beta^2}, \\ \frac{z}{r^2 - \gamma^2} &= \frac{\zeta}{\rho^2 - \gamma^2}, \end{aligned} \right.$$

relations qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\xi - x}{\left(\frac{x}{r^2 - \alpha^2}\right)} = \frac{\eta - y}{\left(\frac{y}{r^2 - \beta^2}\right)} = \frac{\zeta - z}{\left(\frac{z}{r^2 - \gamma^2}\right)} = \rho^2 - r^2.$$

2. Nous allons démontrer que le point P est la projection du centre O sur le plan tangent en M à la surface de l'onde.

On sait [1] que les coordonnées d'un point de la surface de l'onde peuvent s'exprimer au moyen de deux paramètres elliptiques u et v par les formules

$$\begin{aligned} x &= \beta\, \mathrm{sn}(u, k)\, \mathrm{dn}(v, l), \\ y &= \alpha\, \mathrm{cn}(u, k)\, \mathrm{cn}(v, l), \\ z &= \alpha\, \mathrm{dn}(u, k)\, \mathrm{sn}(v, l), \end{aligned}$$

le module k des fonctions elliptiques de l'argument u, le module l des fonctions elliptiques de l'argument v et les modules complémentaires étant définis par les égalités

$$k^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\gamma^2 - \alpha^2}, \qquad k'^2 = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \alpha^2},$$

$$l^2 = \frac{\alpha^2 (\gamma^2 - \beta^2)}{\beta^2 (\gamma^2 - \alpha^2)}, \qquad l'^2 = \frac{\gamma^2 (\beta^2 - \alpha^2)}{\beta^2 (\gamma^2 - \alpha^2)}.$$

---

[1] Voir, par exemple, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 271; 1898.

Pour abréger, nous désignerons par s, c, d les fonctions elliptiques de l'argument u et par s_1, c_1, d_1 les fonctions elliptiques de l'argument v.

Les lignes paramétriques $u =$ const. et $v =$ const. sont des biquadratiques : on s'assure aisément qu'elles sont orthogonales et que les lignes $u =$ const. sont tout entières situées sur des sphères ayant pour centre le point O : cela résulte des relations

$$x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = scds_1 c_1 d_1 (\alpha^2 k'^2 - \beta^2 k^2) = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = (\beta^2 - \alpha^2) s^2.$$

Cela posé, soient MT et MT_1 les tangentes menées en M aux lignes paramétriques $v =$ const. et $u =$ const. MT_1 est perpendiculaire à MT (on vient de le démontrer) et à OM, puisque la ligne paramétrique tangente à MT_1 est tracée sur une sphère de centre O ; MT_1 est donc perpendiculaire au plan de OM et de MT et *la droite* MT *est la projection orthogonale de* OM *sur le plan tangent en* M.

Je dis maintenant que le point $P(\xi, \eta, \zeta)$, dont la correspondance avec le point $M(x, y, z)$ de la surface de l'onde est définie par les relations (M, P) du n° 1, se trouve sur la tangente MT à la ligne paramétrique $v =$ const. On a à vérifier

$$\frac{\xi - x}{x'_u} = \frac{\eta - y}{y'_u} = \frac{\zeta - z}{z'_u},$$

ou, d'après la dernière des relations rappelées,

$$(r^2 - \alpha^2)\frac{x'_u}{x} = (r^2 - \beta^2)\frac{y'_u}{y} = (r^2 - \gamma^2)\frac{z'_u}{z}.$$

Or on trouve aisément

$$r^2 - \alpha^2 = (\beta^2 - \alpha^2) s^2, \qquad \frac{x'_u}{x} = \frac{cd}{s},$$
$$r^2 - \beta^2 = -(\beta^2 - \alpha^2) c^2, \qquad \frac{y'_u}{y} = -\frac{sd}{c},$$
$$r^2 - \gamma^2 = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{k^2} d^2, \qquad \frac{z'_u}{z} = -\frac{k^2 sc}{d}.$$

En portant ces valeurs dans les égalités à vérifier, on trouve que les trois expressions considérées ont pour valeur commune

$$(\beta^2 - \alpha^2)\,sc\,d.$$

Il est donc démontré que le point P est sur MT ; mais, par définition, OP est perpendiculaire sur la droite joignant le point M au point P, donc OP est la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente MT, et, puisque le plan OMT est perpendiculaire au plan tangent en M, on voit en définitive que P est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan tangent en M à la surface de l'onde, d'où le théorème suivant (démontré pour la première fois par le géomètre anglais Niven) :

Théorème. — *Si l'on fait passer une sphère par chacun des cercles* (A), (B), (C) *et par un point* M *de la surface de l'onde, le second point commun aux trois sphères ainsi déterminées est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur le plan tangent en* M.

M. Darboux a traité (*Comptes rendus*, t. XCII, p. 446) le cas où les cercles (A), (B), (C) et le point O ont des positions quelconques, et il a montré, dans ce cas général, que l'on peut, avec la règle et le compas, déterminer les positions du point M situées sur le cercle, intersection d'une sphère quelconque passant par (A) et d'une sphère quelconque par (B). Le théorème précédent fournit une construction géométrique du plan tangent en un point donné de la surface de l'onde.

On a donc une définition géométrique de cette surface et de ses plans tangents, indépendante des propriétés des ellipsoïdes : on pourra voir dans la *Géométrie dans l'espace* de Rouché et Comberousse, n° 1229, une déter-

mination des points coniques et des plans tangents singuliers de la surface, fondée sur ces principes.

Nous allons maintenant passer des résultats précédents aux propriétés de la surface de l'onde relatives à l'ellipsoïde d'élasticité de Fresnel.

3. Si M est un point de la surface de l'onde (définie comme au n° 1) et P le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O sur le plan tangent en M, un plan mené par le centre et parallèle au plan tangent en M coupe l'ellipsoïde

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = 1,$$

suivant une ellipse dont l'un des axes a pour direction la direction de MP et pour longueur l'inverse de la distance OP.

Pour le démontrer, considérons une sphère de centre O et de rayon égal à $\frac{1}{OP}$

$$\rho^2 (x^2 + y^2 + z^2) = 1,$$

puis le cône ayant pour sommet l'origine et passant par l'intersection de cette sphère avec l'ellipsoïde

$$(\rho^2 - \alpha^2) X^2 + (\rho^2 - \beta^2) Y^2 + (\rho^2 - \gamma^2) Z^2 = 0,$$

et rappelons-nous (n° 1) que la droite MP a pour paramètres directeurs

$$\frac{\xi}{\rho^2 - \alpha^2}, \quad \frac{\eta}{\rho^2 - \beta^2}, \quad \frac{\zeta}{\rho^2 - \gamma^2}.$$

On voit que la parallèle à MP menée par l'origine est sur le cône, puisque les coordonnées ξ, η, ζ du point P satisfont à la condition

$$\frac{\xi^2}{\rho^2 - \alpha^2} + \frac{\eta^2}{\rho^2 - \beta^2} + \frac{\zeta^2}{\rho^2 - \gamma^2} = 0.$$

puis, en formant l'équation du plan tangent au cône le long de cette génératrice, on trouve

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z = 0,$$

c'est-à-dire l'équation du plan mené par O perpendiculaire à OP.

On conclut de là que *la parallèle à* MP *menée par* O *est un axe de la section de l'ellipsoïde par un plan passant par le centre et parallèle au plan tangent en* M *et, en outre, que la longueur de cet axe est égale à* $\frac{1}{OP^2}$; c'est ce qu'il fallait démontrer.

4. Appelons *direction de la vibration* (de Fresnel) en un point M de la surface de l'onde la projection de OM sur le plan tangent en M.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on considère deux plans tangents à la surface de l'onde, parallèles et non symétriques par rapport au centre, les directions des vibrations dans ces deux plans sont rectangulaires; de plus, les plans menés par O, perpendiculaires à ces plans tangents et respectivement parallèles aux directions correspondantes des vibrations sont deux plans rectangulaires.

Appelons encore *ligne de vibration* [1] une ligne tracée sur la surface de l'onde et telle que, en chaque point de cette ligne, la direction de la tangente est celle de la vibration en ce point.

On voit que, *si la surface est représentée par les*

---

[1] Cette dénomination est employée par Tait, qui détermine ces lignes et leurs trajectoires orthogonales à l'aide du calcul des quaternions (Tait, *Traité élémentaire des quaternions*, Gauthier-Villars, 1884).

Voir aussi le *Traité de Géométrie cinématique* de M. Mannheim.

formules

$$x = \beta \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(v, l),$$
$$y = \alpha \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{cn}(v, l),$$
$$z = \alpha \operatorname{dn}(u, k) \operatorname{sn}(v, l),$$

les lignes de vibration sont les lignes $v =$ const., *et leurs trajectoires orthogonales sont les lignes* $u =$ const.

Ces propriétés donnent une interprétation physique des lignes paramétriques dans la représentation précédente de la surface de l'onde au moyen des fonctions elliptiques.

[L¹17e]

AU SUJET D'UN THÉORÈME DE M. G. HUMBERT;

PAR M. R. BRICARD.

Dans une Note présentée récemment à l'Académie des Sciences (¹), M. G. Humbert a déduit de ses recherches sur les fonctions abéliennes et leur application à l'étude des surfaces du quatrième ordre un théorème de Géométrie élémentaire, en ajoutant qu'il y aurait intérêt à en donner une démonstration directe.

Ce théorème est le suivant :

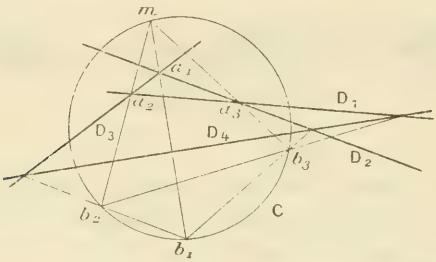
Soient données dans un plan une conique C *et quatre droites* D_1, D_2, D_3, D_4. *S'il existe une conique* C′ *circonscrite au triangle formé par trois de ces droites, passant par les points communs à la quatrième droite et à* C, *et enfin tangente à* C, *il existe trois coniques analogues que l'on obtiendra en permutant les quatre droites de l'énoncé.*

(¹) *Comptes rendus*, t. CXXIX, p. 640.

En voici une démonstration élémentaire :

Soient : m le point de contact des coniques C et C′; a_1, a_2, a_3 les sommets du triangle formé par les droites D_1, D_2, D_3 (a_1 est opposé à D_1, etc.).

Si l'on considère une conique variable tangente à C en m et contenant les points a_1 et a_2, les deux autres points communs à cette conique et à C sont évidemment en relation homographique et involutive : la corde qui les joint passe donc par un point fixe. Ce point fixe, on le voit immédiatement, est situé à l'intersection de la droite a_2a_3 ou D_1 et de la droite qui joint les points b_2 et b_3 où les droites ma_2 et ma_3 rencontrent de nouveau



la conique C. Par conséquent, les droites a_2a_3 ou D_1, b_2b_3 et D_4 sont concourantes.

Répétons le même raisonnement en employant les points a_3 et a_1. On voit finalement que la condition de l'énoncé peut être remplacée par la suivante :

Les six sommets du quadrilatère complet formé par les quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 *sont situés respectivement sur les six côtés d'un quadrangle complet* $mb_1b_2b_3$, *inscrit à la conique* C.

Sous cette nouvelle forme, la condition imposée à D_1, D_2, D_3, D_4 est symétrique par rapport à ces quatre droites. Cette remarque suffit pour établir le théorème de M. Humbert.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1899. — COMPOSITIONS.

Rennes.

Analyse.

Épreuve théorique. — *Étant donné un cône de révolution autour de oz, de sommet o et dont la génératrice fait avec l'axe oz un angle θ, on propose :*

1° *De trouver l'équation générale des courbes tracées sur le cône et dont la génératrice soit à une distance constante a du sommet o.*

2° *De déterminer pour quelle valeur de m la courbe qui a pour équation en coordonnées polaires dans l'espace $\rho = \frac{a}{\cos m\omega}$ est une ligne géodésique de ce cône.*

Épreuve pratique. — *Calculer à un centimètre cube près la portion de volume du cylindre*

$$x^2 + y^2 - Rx = 0$$

renfermé dans la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \qquad (R = 1^m).$$

Mécanique.

Épreuve théorique. — *Deux barres homogènes identiques, articulées entre elles par une de leurs extré-*

mités, reposent sur un plan fixe parfaitement poli qu'elles ne doivent pas quitter. Elles sont formées d'une matière dont les éléments s'attirent proportionnellement à leurs masses et à leurs distances.

Étudier le mouvement le plus général de ce système.

Épreuve pratique. — 1° *Une lentille homogène biconvexe est limitée par deux zones sphériques égales. Connaissant le rayon a de la circonférence qui forme sa tranche et son épaisseur* $2e$, *calculer ses deux rayons de gyration principaux relatifs au centre de gravité. Discuter leur rapport et construire la courbe qui représente sa variation quand on prend* $\frac{e^2}{a^2}$ *pour abscisse; y distinguer les parties qui correspondent à un ellipsoïde d'inertie allongé ou aplati.*

2° *Par quel point faudrait-il fixer la lentille pour que, frappée par une force quelconque, elle entre en rotation autour de la perpendiculaire au plan déterminé par cette force et le point fixe?*

Toulouse.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Énoncé et démonstration du théorème de Cauchy relatif au développement d'une fonction analytique en série de Taylor.*

II. *On considère l'équation différentielle*

$$\frac{du}{dt}\left(\frac{d^2u}{d^2t}+k\right)=at+b,$$

où a, b, k *sont des constantes.*

1° *Déterminer son intégrale générale dans les différents cas qui se présentent suivant les valeurs attribuées aux constantes* a, b, k.

2° *Soient* $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *trois fonctions vérifiant cette équation; démontrer que toutes les surfaces définies en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation*

$$f(x) + \varphi(y) + \psi(z) = \rho,$$

où ρ *est un paramètre variant d'une surface de la famille à l'autre, admettent des trajectoires orthogonales qui sont des courbes planes.*

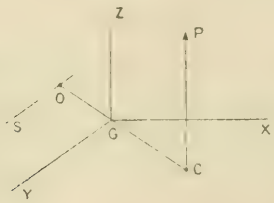
Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — I. *Un corps solide entièrement libre et partant du repos est mis en mouvement par une force de percussion* P *parallèle à l'un des axes principaux* GX, GY, GZ *de l'ellipsoïde central de ce corps.*

Démontrer que sous l'action de cette force, le corps commencera à tourner autour d'un axe OS.

Déterminer la position de cet axe et la vitesse angulaire de rotation au premier instant. Supposons que la force de percussion parallèle à GZ *rencontre en un point* C *le plan principal* GXY *de l'ellipsoïde central,* G *désignant le centre de gravité du corps; montrer que l'axe de rotation cherché rencontre en un point* O

Fig. 1.



la droite GC. *Montrer que les points* C *et* O *sont réciproques, c'est-à-dire que si la force de percussion était*

appliquée en O, *l'axe de rotation correspondant passerait par* C. *Si le point* C *d'application de la force de percussion se déplaçait sur une droite située dans le plan* GXY, *le point réciproque* O *décrirait un certain lieu géométrique que l'on demande de trouver.*

II. *Une figure plane se déplace d'une manière continue dans son plan; on demande de trouver à chaque instant le lieu des points de la figure mobile tels que le rapport entre la vitesse et l'une quelconque des trois accélérations totale, tangentielle et centripète est constant.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'attraction newtonienne exercée sur son sommet par le solide homogène engendré par un secteur circulaire tournant autour d'un des rayons extrêmes. On donne le rayon du secteur, l'angle au centre, la densité.*

Mécanique appliquée.

Épreuve écrite. — I. Δ *et* Δ' *étant deux axes en prolongement, on propose d'étudier les moyens de transformer une rotation uniforme* ω *autour de* Δ *en une rotation uniforme* ω' *autour de* Δ'.

1° *Effectuer cette transformation au moyen de systèmes d'engrenages cylindriques. Cas de* $\frac{\omega'}{\omega} < 0$ *et plus particulièrement cas de* $\frac{\omega'}{\omega} = -1$. *Indiquer dans chacun de ces cas une solution aussi simple que possible.*

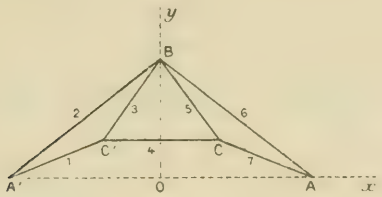
2° *On propose de faire la même transformation de mouvement au moyen d'un axe de glissement* Δ'' *perpendiculaire à* Δ, *commandé par un plateau à rainure porté par* Δ *et qui met en mouvement l'axe* Δ' *par une bielle et une manivelle. Équation de la rainure. A*

quelles conditions doit satisfaire le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ *pour que ce mode de transformation puisse être réalisé pratiquement?*

II. *Déformation du quadrilatère articulé.*

Épreuve pratique. — *Un toit est supporté par des fermes espacées de* 5^m, *l'une des faces supporte une*

Fig. 2.



charge verticale de 100^{kg} *par mètre carré et l'autre une charge de* 50^{kg} *par mètre carré. Chacune des fermes a la forme ci-dessus et ses dimensions sont données comme il suit :*

Coordonnées de A par rapport à Ox et Oy...				$x = 4^m$	$x = 0^m$
»	B	»	...	$x = 0$	$y = 3$
»	C	»	...	$x = 1,50$	$y = 1$

Chaque ferme est simplement posée sur deux appuis.

Déterminer, pour une quelconque des fermes intermédiaires, les réactions des appuis et les tensions des barres en indiquant celles qui sont tendues et celles qui sont comprimées.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1797.

(1898, p. 244.)

Intégrer l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{n}{1} x \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + x^n y = 0.$$

(H. Laurent.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Si l'on fait d'abord $n = 1, 2$, on trouve les intégrales

$$y = Ce^{\frac{-x^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad y = e^{\frac{-x^2}{2}}(Ce^x + C_1 e^{-x}).$$

Posons alors $y = e^{\frac{-x^2}{2}} z$ et après avoir calculé les différentielles de 1 à n de $e^{\frac{-x^2}{2}} z$, introduisons ces valeurs dans (1) nous aurons, pour n pair,

$$\begin{aligned} e^{\frac{-x^2}{2}} \Big\{ & \frac{d^n z}{dx^n} - \frac{n(n-1)}{1.2}(1)\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} \\ & + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(4)!}(1.3)\frac{d^{n-4} z}{dx^{n-4}} + \ldots \\ & + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{n(n-1)}{1.2}[1.3.5\ldots(n-3)]\frac{d^2 z}{dx^2} \\ & + (-1)^{\frac{n}{2}}[1.3.5\ldots(n-1)]z \Big\} = 0. \end{aligned}$$

Pour n impair, les deux derniers termes du développement entre crochets seront

$$\begin{aligned} & + (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{n(n-1)(n-3)}{1.2.3}[1.3.5\ldots(n-4)]\frac{d^3 z}{dx^3} \\ & + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n}{1}[1.3.5\ldots(n-2)]\frac{dz}{dx} \Big\}. \end{aligned}$$

Les coefficients de ces transformées étant indépendants de la variable x, on fera $z = e^{rx}$, r étant racine de l'une des équations suivantes, pour n pair :

$$r^n - \frac{n(n-1)}{1.2} r^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(4)!}(1.3) r^{n-4} + \ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{n(n-1)}{1.2}[1.3.5\ldots(n-3)] r^2$$
$$+ (-1)^{\frac{n}{2}}[1.3.5\ldots(n-1)] = 0.$$

Pour n impair, les deux derniers termes de l'équation seront :

$$-(-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}[1.3.5\ldots(n-4)] r^3$$
$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n}{1}[1.3.5\ldots(n-2)] r.$$

Il résulte de ces calculs, pour les intégrales cherchées, les formules, pour n pair :

$$y = e^{\frac{-x^2}{2}}(C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}):$$

pour n impair :

$$y = e^{\frac{-x^2}{2}}(a - C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_{n-1} e^{r_{n-1} x}).$$

dans lesquelles a, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n sont des constantes arbitraires et r_1, r_2, ..., r_n les racines des équations en r.

Question 1798.

1898, p. 244.

Par un point m d'une conique on fait passer un cercle qui coupe cette courbe aux points a, b, c. Démontrer que, quel que soit ce cercle, la droite de Simson de m, par rapport au triangle abc, passe par un point fixe.

(MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Considérons d'abord le faisceau des cercles tangents en m, à la conique. Le point a coïncide avec m et toutes les cordes bc sont parallèles à la direction symétrique de la tangente en m, par rapport à un des axes de la conique. Pour tous ces triangles la droite de Simson de m est la perpendiculaire Δ abaissée de m sur la direction bc. Considérons maintenant le faisceau des cercles passant par les deux points m et a de la conique. Chaque cercle coupe la conique encore en deux points b et c. Pour les différents cercles du faisceau, les droites ab et ac sont les rayons correspondants d'un faisceau en involution, car les cordes bc isoscéliennes de ma par rapport à un des axes de la conique sont parallèles entre elles. Les perpendiculaires $m\beta$ et $m\gamma$ abaissées de m sur ab et ac sont donc aussi les rayons d'un faisceau en involution; or β et γ appartiennent à la circonférence décrite sur ma comme diamètre, donc $\beta\gamma$, droite de Simson de m par rapport à abc, passe par un point fixe qui appartient à la droite Δ, car un des cercles du faisceau m, a est tangent en m à la conique : ce point reste fixe quand a varie, les deux faisceaux ma et ma' ayant toujours un cercle maa' en commun.

Question 1800.

(1898, p. 292.)

On coupe une cubique ayant un point de rebroussement par une droite quelconque. Par chacun des points de rencontre on peut mener à la cubique une tangente, autre que celle qui touche la cubique en ce point. Démontrer que les trois points de contact de ces tangentes sont en ligne droite.

Propriété corrélative. (A. Cazamian.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Appelons 1, 2, 3 les trois points collinéaires de la cubique C_3^3, 1' et 2' les points de contact des tangentes issues de 1 et 2,

3′ le point où la droite $|1'2'|$ va couper nouvellement la cubique : comme les tangentiels des trois points collinéaires sont en ligne droite, la tangente en le point 3′ passe par 3. La proposition corrélative est : Les trois tangentes d'une cubique de la troisième classe, issues d'un point de son plan, coupent la cubique en trois points dont les tangentes vont concourir en un deuxième point.

Autre solution de M. Dulimbert.

Question 1801.

(1898, p. 340.)

Si l'on prend sur les perpendiculaires communes aux arêtes opposées d'un tétraèdre des vecteurs dont les longueurs soient inversement proportionnelles aux longueurs de ces perpendiculaires, le vecteur résultant est perpendiculaire à l'une ou l'autre des faces du tétraèdre selon le sens dans lequel on dirige les vecteurs.

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par un Anonyme.

Soit le tétraèdre ABCD, dans lequel nous supposerons que le sens de circulation ABC est de droite à gauche pour un observateur qui a les pieds sur le plan ABC, la tête en D; les extrémités des perpendiculaires communes étant A′, B′, C′ sur les arêtes issues de D, et A″, B″, C″ sur les arêtes opposées, nous dirigerons les vecteurs de A′ vers A″, ...; les longueurs des perpendiculaires communes seront α, β, γ.

Considérons l'expression

$$R = -DA.BC - DB.CA - DC.AB,$$

dont chaque terme est un produit de deux vecteurs; la partie réelle du premier terme est

$$\text{gr}\,DA.\text{gr}\,BC \times \cos(DA, BC),$$

et la partie vectorielle est un vecteur dirigé suivant A′A″, de A′ vers A″, ayant pour module

$$\text{gr}\,DA.\text{gr}\,BC \times \sin(DA, BC) \quad \text{ou} \quad \frac{6V}{\gamma}.$$

Or on a, en prenant D comme origine,

$$\begin{aligned} R &= -DA(DC - DB) - DB(DA - DC) - DC(DB - DA) \\ &= (DB.DC - DC.DB) + \ldots \\ &= 2V(DB.DC) + 2V(DC.DA) + 2V(DA.DB). \end{aligned}$$

1° L'expression R est un vecteur; en écrivant que la partie réelle est nulle, on retrouve une formule bien connue dans la théorie du tétraèdre.

2° Le premier terme de l'expression précédente est un vecteur perpendiculaire au plan DBC; en donnant à ce vecteur le point D comme origine, il est dirigé du côté de l'arête DA; son module est le quadruple de l'aire du triangle DBC. Des faits analogues ont lieu pour les deux autres termes de l'expression, et il résulte d'un théorème bien connu que le vecteur résultant est perpendiculaire au plan ABC, dirigé vers ce plan, et qu'il a pour module le quadruple de l'aire du triangle ABC. Si les vecteurs de l'énoncé ont pour modules $\frac{k^2}{\alpha}$, $\frac{k^2}{\beta}$, $\frac{k^2}{\gamma}$, le vecteur résultant a pour module

$$4ABC \times \frac{k^2}{6V} \qquad \text{ou} \qquad \frac{2k^2}{h},$$

h étant celle des hauteurs du tétraèdre qui est parallèle au vecteur résultant.

Autre solution de M. Merlin.

Question 1802.

(1898, p. 340.)

En représentant par r_1, r_2, r_3 les rayons de courbure aux points A, B, C *de l'ellipse de Steiner du triangle* ABC *et par* ω *l'angle de Brocard de ce triangle, on a la relation*

$$\sum \frac{r_1}{a} = \cot\omega.$$

(A. Droz-Farny.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

En appelant α, β les demi-axes de l'ellipse, les équations paramétriques de la courbe sont $x = \alpha\cos t$, $y = \beta\sin t$, t est

l'angle excentrique; si le paramètre du point où vont se couper les trois cercles osculateurs en les points A, B, C (STEINER, *Crelle*, t. 32, p. 300) est -3θ, en posant $\frac{2\pi}{3} = \lambda$ les paramètres de A, B, C sont respectivement θ, $\theta + \lambda$ et $\theta + 2\lambda$ et par suite

$$a^2 = 3(\alpha^2 \sin^2\theta + \beta^2 \cos^2\theta),$$
$$b^2 = 3[\alpha^2 \sin^2(\theta + \lambda) + \beta^2 \cos^2(\theta + \lambda)],$$
$$c^2 = 3[\alpha^2 \sin^2(\theta + 2\lambda) + \beta^2 \cos^2(\theta + 2\lambda)];$$

le rayon de courbure ρ au point t étant donné par

$$\alpha^2 \beta^2 . \rho^2 = (\alpha^2 \sin^2 t + \beta^2 \cos^2 t)^3,$$

nous avons

$$a^3 = \alpha\beta . r_1 . \sqrt{27},$$
$$b^3 = \alpha\beta . r_2 . \sqrt{27},$$
$$c^3 = \alpha\beta . r_3 . \sqrt{27},$$
$$\alpha\beta . \sqrt{27} . \sum \frac{r_1}{a} = a^2 + b^2 + c^2 = 4 S . \cot\omega;$$

on trouve immédiatement que

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{vmatrix} = \frac{\alpha\beta . \sqrt{27}}{2},$$

et la relation proposée est démontrée. La dernière formule et la suivante :

$$a^3 + b^3 + c^3 = \alpha\beta(r_1 + r_2 + r_3) . \sqrt{27},$$

sont, peut-être, nouvelles.

Question 1802.

AUTRE SOLUTION

Par M. L. RIPERT.

S étant l'aire du triangle, on a

$$\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : \frac{2S}{bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}.$$

Donc

$$\cot\omega = \sum \cot A = \sum \frac{a^2}{4S}.$$

D'autre part (J. Koehler, *Exercices*, t. I, Chapitre VII, p. 216-217), on a $r_1 = \frac{a^3}{4S}$.

Donc

$$\sum \frac{r_1}{a} = \sum \frac{a^2}{4S} = \cot\omega. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Autre solution par M. Barisien.

QUESTIONS.

482 (**1859**, 266). Le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre, le centre de l'hyperboloïde passant par les quatre hauteurs, le centre de gravité du tétraèdre, sont trois points en ligne droite. (Joachinsthal.)

539 (**1860**, 308). Trouver l'équation d'une courbe qui représente les trois folioles égales du *Trifolium pratense*. Chaque foliole est partagée symétriquement par une droite qui aboutit vers l'intérieur à un point de rebroussement, et à l'extérieur à un point d'inflexion. Les trois droites formant entre elles des angles de 120° se réunissent (à peu près) au même point du pédoncule.

558 (**1861**, 399). Pour quelle longitude du Soleil le temps que son disque met à traverser le méridien est-il un maximum ou un minimum?

1855. Un cône a pour sommet un point s d'un ellipsoïde et pour base la section diamétrale faite dans cette surface par un plan perpendiculaire au diamètre qui passe par s. L'enveloppe de ce cône, lorsque son sommet décrit l'ellipsoïde, est une surface de l'onde. (Mannheim.)

1856. Des poids 1, 1, 2, 3, 5, ..., U_n, mesurés par les nombres qui forment la suite de Fibonacci, sont respectivement appliqués en des points d'une droite qui ont pour abscisses 1,

2, 3, ..., n. On demande de déterminer la position du barycentre de ce système. (C.-A. LAISANT.)

1856. $pqrs\ldots tuvw$ est une permutation formée avec les quantités positives croissantes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Quelles sont les permutations pour lesquelles la somme

$$pq + qr + rs + \ldots + tu + uv + vw$$

a 1° la plus grande valeur? 2° la plus petite valeur?

(E. LEMOINE.)

1857. On donne, dans un plan, un triangle ABC dont les côtés sont a, b, c. On demande d'étudier, dans l'espace, le lieu des points M tels que leurs distances MA′, MB′, MC′ aux trois côtés du triangle soient proportionnelles à a, b, c.

En particulier, déterminer la projection de ce lieu sur le plan du triangle, séparer sur cette projection les arcs qui sont des projections réelles de la courbe de l'espace, et examiner le cas du triangle isoscèle.

Cette question constitue en quelque sorte une extension du point de Lemoine, puisque c'est, dans l'espace, la courbe dont tous les points jouissent de la propriété qui dans le plan appartient au point de Lemoine. (E. LEMOINE.)

1858. Prouvez géométriquement que la caustique des rayons divergeant du focus et réfléchis à l'arc d'une cardioïde est la courbe $\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ où a est le radius du cercle fixe de la cardioïde. (ARCHIBALD.)

1859. On a, dans un espace linéaire à n dimensions, $L_n(n+1)$ points $P_0 P_1 \ldots P_n$: chercher le lieu géométrique du barycentre de $l^1(n+1)^{\text{ème}}$ constitué par ces points lorsque P_0 étant fixe, l'iperplan déterminé par les autres tourne autour d'un point fixe Q. (H. PICCIOLI.)

1860. $a_1 a_2 \ldots a_n$ étant les chiffres d'un nombre, soit $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} (a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n})$ un quelconque des nombres que l'on peut obtenir du précédent en changeant l'ordre des chiffres par un nombre pair (impair) de transpositions. Montrer que l'on a

$$\Sigma a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} = \Sigma a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_n} \qquad \text{pour} \qquad n > 3.$$

(H. PICCIOLI.)

1861. La tangente en un point M d'une hypocycloïde triangulaire rencontre son cercle tritangent en deux points P et Q. Montrez que si P est le point le plus rapproché de M, on a PM = PQ. (E.-N. Barisien.)

1862. Soient α, β et γ trois points animés de mouvements uniformes sur les côtés d'un triangle *abc*. Les trois cercles analogues au cercle $\alpha\beta\gamma$ se coupent en un point d'un cercle fixe. (E. Duporcq.)

1863. Il existe une infinité de coniques qui touchent en quatre points une quartique bicirculaire; ces points sont sur un cercle dont le centre est fixe. (E. Duporcq.)

1864. Étant donnés sur une conique S′ deux couples de points fixes A, B et C, D, si deux points M et N de la conique ont une correspondance doublement quadratique et symétrique exprimée par la relation

$$\frac{1+(ABMN)}{1-(ABMN)} \times \frac{1+(CDMN)}{1-(CDMN)} = -\frac{1+(ABCD)}{1-(ABCD)},$$

où les parenthèses désignent des rapports anharmoniques, la corde MN est un côté d'un contour quadrangulaire variable MNPQ circonscrit à une conique fixe S et inscrit à la conique S′. (G. Fontené.)

1865. Si un hyperboloïde circonscrit à un tétraèdre orthocentrique passe aussi par l'orthocentre, il admet des systèmes de trois génératrices rectangulaires, et inversement. (G. Fontené.)

1866. Soit Q la conique inscrite en A, B, C au triangle $A_1B_1C_1$.

I. Si par A_1 on mène une droite quelconque qui coupe B_1C_1 en I_1, CA en H et AB en K, le point ω(BH, CK) appartient à Q et ωI_1 est la tangente en ω.

II. P étant un point quelconque de BC, si PB_1 et PC_1 coupent C_1A_1 et A_1B_1 en H_1 et K_1, la droite H_1K_1 est tangente à Q et PA la rencontre au point de contact ω_1. (P. Sondat.)

[Q2]

SUR LES DÉVELOPPANTES DE CERTAINES LIGNES EN S_n [1] ET SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES COURBES HYPERSPHÉRIQUES A COURBURE CONSTANTE;

PAR M. HENRI PICCIOLI.

1. Proposons-nous de résoudre la question que voici :

Chercher s'il y a des courbes en S_n telles que leurs développantes soient des lignes sphériques.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les coordonnées d'un point fixe dans l'S_n,

$$x_1 = x_1(s), \qquad x_2 = x_2(s), \qquad x_n = x_n(s)$$

les équations d'une ligne L dont s est l'arc,

$$(1) \quad x'_1 = x_1 - s\alpha_{11}, \qquad x'_2 = x_2 - s\alpha_{12}, \qquad x'_n = x_n - s\alpha_{1n}$$

celles d'une de ses développantes L'. Posons, R étant une constante,

$$\Sigma_i (y_i - x_i + s\alpha_{1i})^2 = R^2,$$

En différentiant, on obtient

$$\Sigma_i (y_i - x_i)\alpha_{2i} = 0,$$

c'est-à-dire

$$A_2 = 0.$$

Nous en concluons, d'après un théorème connu, que :

[1] Par *ligne en* S_n, l'auteur entend une ligne dans un espace à n dimensions.

A. *Les courbes qui ont pour développantes des lignes sphériques sont les géodésiques des cônes ayant pour sommet le centre de la sphère.*

On pouvait arriver plus rapidement à ce résultat, en observant que des formules (1) l'on tire

$$\alpha'_{1i} = -\alpha_{2i}, \tag{2}$$

$\alpha'_{11}, \alpha'_{12}, \ldots, \alpha'_{1n}$ étant les cosinus directeurs de la tangente à L′ et $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}$ ceux de la normale principale de L. Alors il s'ensuit que l'on a

$$A'_1 = -A_2, \tag{3}$$

d'où la propriété dont il s'agit.

La même formule (3) nous montre que les courbes qui ont les plans rectifiants tangents à une sphère admettent pour développantes des courbes qui ont leurs plans normaux tangents à une sphère concentrique.

2. Soit $\mathcal{C}$ une courbe quelconque en S_n; lorsqu'un point se meut sur cette courbe pour la parcourir tout entière, le plan hyperosculateur en ce point enveloppe une surface à $(n-1)$ dimensions Σ_{n-1} constituée par les ∞^1 S_{n-2} osculateurs à $\mathcal{C}$. En nous bornant au cas où la dernière direction principale de $\mathcal{C}$ coupe sous un angle constant une direction donnée d, si nous considérons une géodésique de Σ_{n-1}, l'on voit tout de suite que sa normale principale coupe d sous un angle constant et, par conséquent, ses développantes, à cause des formules (2), sont des hélices cylindriques.

On a donc le théorème suivant :

A′. *Les géodésiques de la surface engendrée par les* S_{n-2} *osculateurs d'une courbe dont la dernière direction principale coupe, sous un angle constant, une di-*

rection fixe, ont pour développantes des hélices cylindriques.

Remarque. — On énonce ce théorème en S_3 en disant que les développantes des géodésiques d'un hélicoïde développable sont des hélices cylindriques. La raison pour laquelle nous en avons modifié l'énoncé en l'étendant à l'S_n, c'est que les courbes de S_n qui ont la dernière direction principale inclinée d'un angle constant sur une direction donnée, ne rentrent plus dans la classe des hélices cylindriques lorsque n est égal ou supérieur à 4.

Cependant, on peut trouver des lignes jouissant des deux propriétés : ainsi, par exemple, en S_4 on a les hélices dans lesquelles le premier et le troisième rayon de courbure sont égaux, et le théorème qui précède leur est applicable.

On a aussi cet énoncé :

Les courbes de S_{2h+1} *définies par les équations*

$$\frac{R_2}{R_1} = a_1, \qquad \frac{R_4}{R_3} = a_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{R_{2h}}{R_{2h-1}} = a_h,$$

les quantités a étant des constantes, sont telles que leurs directions impaires coupent sous un angle constant une direction donnée, pendant que les autres lui sont perpendiculaires.

A ces courbes, de même que celles à courbures constantes de S_{2h+1} qui en sont un cas particulier, est aussi applicable le théorème que nous venons d'exprimer.

3. Le théorème A′ peut s'appliquer même aux géodésiques de la surface à $(n-1)$ dimensions enveloppée par les S_{n-1} passant par un point fixe et tangente à une hypersphère de S_n.

Comme cas particulier, faisons ici $n = 3$ et joignons-y

le résultat du théorème A. On obtient la proposition que voici :

Les développantes des géodésiques du cône de rotation de l'espace ordinaire sont des hélices sphériques.

Cependant ce théorème n'est pas complet. On sait, en effet, que dans l'S_4 on peut trouver des lignes qui soient à la fois géodésiques d'un cylindre et d'un cône, ce qui ne peut pas arriver en S_3. Or, si nous appliquons à ces courbes le résultat obtenu par le théorème A, en rappelant que les développantes des hélices cylindriques de S_4 sont des courbes de S_3, l'on voit tout de suite que ces *géodésiques cylindro-coniques* de S_4 ont elles-mêmes pour développantes des hélices sphériques de S_3 et que, par conséquent, la proposition qui précède peut se compléter ainsi :

Les courbes qui ont pour développantes des hélices sphériques de S_3 sont les géodésiques du cône de révolution de S_3 et les géodésiques cylindro-coniques de S_4.

Ce théorème, comme on le reconnaît facilement, peut s'étendre à l'espace à n dimensions.

4. Avant d'étudier les courbes hypersphériques à courbures constantes il faut rappeler que ces courbes ne peuvent exister que dans un espace à un nombre pair de dimensions, comme l'a démontré M. Brunel, et que l'équation différentielle qui lie les $2p-1$ rayons de courbure d'une courbe hypersphérique générale de S_{2p} est représentée par

$$H_{2p} = 0,$$

$$H_m = \frac{d}{ds}(R_{m-1}H_{m-1}) + \frac{R_{m-2}H_{m-2}}{R_{m-1}}$$

étant la relation qui fait dépendre un H_m quelconque des deux qui le précèdent; on a en outre

$$H_1 = 1, \qquad H_2 = \frac{dR_1}{ds}.$$

Cela posé, l'on voit immédiatement que pour qu'une courbe hypersphérique de S_{2p} soit à courbures constantes, il faut et il suffit que l'on ait

$$H_{2i} = 0, \qquad H_{2i-1} = h_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les h étant des constantes différentes entre elles. Or, si nous prenons les formules

$$\frac{dA_t}{ds} = \frac{A_{t+1}}{R_t} - \frac{A_{t-1}}{R_{t-1}} \qquad (t = 1, 2, \ldots, p),$$

de l'hypothèse

$$A_1 = 0$$

qui caractérise les courbes hypersphériques, quelle que soit la dimension de l'espace ambiant, il résulte

$$A_t = R_{t-1} H_{t-1}.$$

En conséquence, nous avons pour une courbe hypersphérique de S_{2p},

$$A_{2i-1} = 0, \qquad A_{2i} = h_i R_{2i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Donc on peut énoncer le théorème que voici :

Pour qu'une courbe de S_{2i} *soit à courbures constantes, il faut et il suffit que les hyperplans à index impair passent tous par un même point* P *et que les autres demeurent tangents à des sphères de centre* P *dont les rayons varient, en général, avec l'index.*

Ce qui nous donne la propriété caractéristique que nous cherchions.

Remarquons en passant que A_2 étant constant, les dé-

veloppantes de ces courbes rentrent dans la catégorie de celles définies par l'équation

$$A_1 = \text{const.}$$

applicable aux courbes ayant les hyperplans normaux tangents à une hypersphère.

[F5eα]

REMARQUE SUR L'INVERSION DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES;

PAR M. J. DOLBNIA.

En exécutant l'inversion de l'intégrale

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

il est facile de se heurter à un cas qui semble, au premier abord, présenter une contradiction inexplicable.

Admettons, avec Halphen [1], que

$$x^2 = z + \frac{1}{\frac{1+k^2}{3}};$$

nous aurons alors

$$u = \sqrt{\lambda} \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

$$\lambda^2 g_2 = \frac{4}{3}(1 - k^2 + k^4);$$

$$\lambda^3 g_3 = -\frac{1}{27}(1+k^2)(2-k^2)(1-2k^2) \quad [2],$$

donc

$$\frac{g_2^3}{g_3^2} = \frac{108(1-k^2+k^4)^3}{(1+k^2)^2(2-k^2)^2(1-2k^2)^2}.$$

---

[1] HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 23.
[2] *Ibid.*, t. I, p. 60.

De pareilles formules expriment directement les invariants g_2 et g_3 en fonction du module k.

Si maintenant à l'intégrale

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 x^4 - (1 + k^2) x^2 + 1}},$$

nous appliquons les formules connues de l'inversion des intégrales elliptiques et si nous calculons, conformément à ces dernières, les invariants g_2 et g_3, nous trouverons

$$g_2 = \frac{S}{a_0^2} = \frac{k^4 + 14 k^2 + 1}{12 k^4},$$

$$g_3 = \frac{T}{a_0^3} = \frac{k^6 - 33 k^4 - 33 k^2 + 1}{216 k^6},$$

$$\frac{g_2^3}{g_2^3} = 27 \frac{(k^4 + 14 k^2 + 1)^3}{(k^6 - 33 k^4 - 33 k^2 + 1)^2}.$$

En comparant les deux résultats obtenus, nous remarquerons leur parfaite dissemblance. Il est donc indispensable de trouver un lien entre ces deux résultats et d'éclaircir cette contradiction apparente. Dans ce but, avant de calculer les invariants

$$g_2 \quad \text{et} \quad g_3,$$

d'après les formules d'inversion, soumettons l'argument u à une transformation de Landen. Grâce à ce procédé, le module k sera remplacé, comme on le sait, par

$$l = \frac{2\sqrt{k}}{1 + k},$$

et nous aurons

$$u = \frac{1}{1 + k} \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - l^2 y^2)}},$$

Maintenant si nous faisons

$$y^2 = \frac{1}{1 + \xi^2},$$

nous obtiendrons

$$u = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{1+k} \int \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - G_2\xi - G_3}},$$

$$\frac{\lambda_1^2}{(1+k)^4} G_2 = \frac{4}{3}(1 - e^2 + e^4),$$

$$\frac{\lambda_1^3}{(1+k)^6} G_3 = -\frac{4}{27}(1+e^2)(2-e^2)(1-2e^2),$$

d'où

$$\frac{G_2^3}{G_3^2} = \frac{108(1-e^2+e^4)^3}{(1+e^2)^2(2-e^2)^2(1-2e^2)^2};$$

ou, en introduisant dans cette formule la valeur

$$l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

nous aurons

$$\frac{G_2^3}{G_3^2} = \frac{27(k^4+14k^2+1)^3}{(k^6-33k^4-33k^2+1)^2}.$$

Ainsi le lien entre les deux résultats est établi, et la transformation de Landen trouve sa source dans la nature même des intégrales elliptiques.

[O5b]

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES LIGNES GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE;

PAR M. l'abbé ISSALY.

De nos recherches antérieures relatives aux lignes remarquables qu'on peut tracer, soit sur les surfaces, soit sur les pseudo-surfaces [1], il résulte que, *dans les deux cas,* l'équation notamment des lignes géodésiques peut s'écrire ainsi :

$$d\varphi + r\,ds + r'\,ds' = 0, \tag{1}$$

[1] Voir *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1897.

les arcs ds, ds' désignant les projections (obliques) de l'arc élémentaire dS de la ligne considérée (S), sur les arêtes MX, MY du trièdre *birectangle* mobile MXYZ, supposé d'angle Φ, et φ représentant l'inclinaison des deux arcs ds, dS, l'un sur l'autre.

Comme il ne sera question, dans ce qui doit suivre, que de géodésiques appartenant à des *surfaces*, nous mettrons immédiatement l'équation (1) sous la forme appropriée

$$d\varphi + \mathrm{A}\, r\, du + \mathrm{A}'\, r'\, du' = 0, \tag{1'}$$

et notre but principal sera d'obtenir les expressions *vraies* de r, r', $d\varphi$, en fonction de A, A', Φ et des dérivées partielles de ces quantités, par rapport aux variables u, u', fonctions elles-mêmes (si l'on veut) d'une troisième variable, t, par exemple. Pour plus de facilité dans cette recherche, nous distinguerons le cas où Φ est constant d'avec celui où il est variable.

I. Premier cas : *L'angle Φ est constant.* — Et d'abord l'expression des coefficients $\mathrm{A}r$, $\mathrm{A}'r'$ nous est fournie par notre précédente Note (*Nouvelles Annales*, 1900, p. 49), d'après laquelle, toutes *compensations d'erreurs* préalablement écartées, on a, eu égard aux hypothèses $n = r$, $n' = r'$,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}\, r &= -\frac{1}{\mathrm{A}' \sin\Phi}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'} - \frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u}\cos\Phi\right), \\ \mathrm{A}'\, r' &= \frac{1}{\mathrm{A} \sin\Phi}\left(\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'}\cos\Phi\right). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Il ne reste donc qu'à évaluer $d\varphi$.

Pour y parvenir, nous rappelons qu'en faisant $\mathrm{MM}' = dS$, le triangle infinitésimal $\mathrm{M}\mu\mathrm{M}'$ donne

$$\frac{\mathrm{A}\, du}{\sin\varphi'} = \frac{\mathrm{A}'\, du'}{\sin\varphi} = \frac{dS}{\sin\Phi}, \tag{3}$$

conjointement avec

$$\Phi = \varphi + \varphi', \tag{4}$$

et

$$dS^2 = A^2\,du^2 + A'^2\,du'^2 + 2\,A\,A'\cos\Phi\,du\,du'. \tag{5}$$

De là on tire

$$\left\{\begin{aligned} d(A\,du)\sin\Phi &= d^2S\sin\varphi' + dS\,d\varphi'\cos\varphi',\\ d(A'du')\sin\Phi &= d^2S\sin\varphi + dS\,d\varphi\cos\varphi. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Éliminant d^2S et observant que, par supposition, $d\varphi' = -d\varphi$, il vient, en tenant compte de (3),

$$\left\{\begin{aligned} d\varphi = \frac{\sin\Phi}{dS^2}\Big[&AA'(du\,d^2u' - du'\,d^2u)\\ &+\left(A\frac{\partial A'}{\partial u} - A'\frac{\partial A}{\partial u}\right)du^2\,du'\\ &+\left(A\frac{\partial A'}{\partial u'} - A'\frac{\partial A}{\partial u'}\right)du\,du'^2\Big]. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ceci posé, remontons à l'équation (1). Si l'on y substitue les valeurs (2), (5) et (7), on en déduira, pour la solution du cas restreint qui nous occupe, l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\left\{\begin{aligned} &(du\,d^2u' - du'\,d^2u)\sin^2\Phi\\ &\quad= \frac{A}{A'^2}\left(\frac{\partial A}{\partial u'} - \frac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi\right)du^3\\ &\qquad+\left[\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{2}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u}\right)\sin^2\Phi\right.\\ &\qquad\qquad\left.+\frac{3}{A'}\left(\frac{\partial A}{\partial u'} - \frac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi\right)\cos\Phi\right]du^2\,du'\\ &\qquad-\left[\left(\frac{1}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u'} - \frac{2}{A}\frac{\partial A}{\partial u'}\right)\sin^2\Phi\right.\\ &\qquad\qquad\left.+\frac{3}{A'}\left(\frac{\partial A'}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial u'}\cos\Phi\right)\cos\Phi\right]du\,du'^2\\ &\qquad-\frac{A'}{A^2}\left(\frac{\partial A'}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial u'}\cos\Phi\right)du'^3. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Cette équation, dont nous garantissons l'exactitude, est, comme on devait s'y attendre, parfaitement symétrique en u, u', A, A'.

Bien qu'elle tire sa simplicité (relative) de ce fait que $\sin\Phi$ et $\cos\Phi$ s'y trouvent mis *tous deux* en évidence, il sera toutefois loisible d'éliminer, dans certaines applications, ces deux lignes trigonométriques à l'aide des relations usuelles

$$(9)\qquad \cos\Phi = \frac{B''}{AA'}, \qquad \sin\Phi = \frac{1}{AA'}\sqrt{A^2A'^2 - B''^2}.$$

Pas ne sera besoin, à coup sûr, de cette substitution, si l'on veut envisager le cas particulier, mais très important, où l'angle Φ des coordonnées est droit. On a alors, en effet, aussitôt

$$(8')\qquad \left\{\begin{aligned} & du\,d^2u' - du'\,d^2u \\ & = \frac{A}{A'^2}\frac{\partial A}{\partial u'}du^3 + \left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{2}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u}\right)du^2\,du' \\ & \qquad - \left(\frac{1}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u'} - \frac{2}{A}\frac{\partial A}{\partial u'}\right)du\,du'^2 \\ & \qquad - \frac{A'}{A^2}\frac{\partial A'}{\partial u}du'^3. \end{aligned}\right.$$

Mettons nos résultats à l'épreuve à l'aide de cette dernière forme, et choisissons pour cela l'hélicoïde gauche, représenté par le système

$$x_0 = \rho\cos\theta, \qquad y_0 = \rho\sin\theta, \qquad z_0 = a\theta.$$

On s'assurera avant tout qu'avec ces données,

$$A = \sqrt{\rho^2 + a^2}, \qquad A' = 1, \qquad \Phi = \frac{\pi}{2},$$

et que dès lors c'est bien la formule (8') qui est *directement* en cause. Posant $u = \theta$, $u' = \rho$ et adoptant θ pour variable indépendante, ce qui implique $d^2u = d^2\theta = 0$,

on trouvera pour équation des lignes géodésiques de la surface proposée

$$\left(\rho + \frac{a^2}{\rho}\right)\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - 2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - (\rho^2 + a^2) = 0,$$

équation exacte dont l'intégration, on le sait, est possible.

Comme *transition* avec le cas où l'angle Φ varie, il est à propos de remarquer qu'en différentiant, dans cette seconde hypothèse, la valeur (9) de $\cos\Phi$, par rapport à u, par exemple, on en déduit

$$AA'\frac{\partial\Phi}{\partial u}\sin\Phi = -\frac{\partial B''}{\partial u} + \cos\Phi\left(A'\frac{\partial A}{\partial u} + A\frac{\partial A'}{\partial u}\right),$$

ou bien

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}\sqrt{A^2A'^2 - B''^2} = -\frac{\partial B''}{\partial u} + B''\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{1}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u}\right).$$

Donc, pour exprimer, avec le nouveau paramètre B'', que $\Phi = \text{const.}$, il est nécessaire et suffisant de poser la condition

$$\frac{\partial B''}{\partial u} = B''\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{1}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u}\right).$$

La deuxième variable conduirait évidemment au même résultat en u'.

II. Deuxième cas : *L'ange Φ est variable.* — L'équation des lignes géodésiques admet alors, tant pour les pseudo-surfaces que pour les surfaces, la double forme que voici :

$$(10)\qquad \begin{cases} d\varphi + r\,ds + r'\,ds' = 0, \\ d\varphi' - n\,ds - n'\,ds' = 0, \end{cases}$$

formes équivalentes, dans la seconde desquelles,

$$(11)\qquad n = r + \frac{\partial\Phi}{\partial s}, \qquad n' = r' + \frac{\partial\Phi}{\partial s'}.$$

Je dis équivalentes, car, par addition, on en déduit l'identité

$$d\varphi + d\varphi' = d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial s}\,ds + \frac{\partial\Phi}{\partial s'}\,ds'.$$

Dans le cas spécial des surfaces, il y a lieu de mettre le système (10) sous la forme particulière

$$(10') \qquad \begin{cases} d\varphi + \mathrm{A}r\,du - \mathrm{A}'r'\,du' = 0, \\ d\varphi' - \mathrm{A}n\,du + \mathrm{A}'n'\,du' = 0, \end{cases}$$

avec

$$(11') \qquad n = r + \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \qquad n' = r' + \frac{1}{\mathrm{A}'}\frac{\partial\Phi}{\partial u'}.$$

Bien plus, comme il importe de diriger dès à présent les nouveaux calculs de façon à leur donner toute la symétrie possible, c'est par l'équation combinée

$$(12) \qquad d\varphi - d\varphi' + \mathrm{A}(n + r)\,du + \mathrm{A}'(n' + r')\,du' = 0,$$

qu'il convient de remplacer le système (10').

Cela étant, d'après la Note déjà citée, nous avons

$$(13) \qquad \begin{cases} \mathrm{A}n = \mathrm{A}r - \dfrac{\partial\Phi}{\partial u} = -\dfrac{1}{\mathrm{A}'\sin\Phi}\left(\dfrac{\partial\mathrm{A}}{\partial u'} - \dfrac{\partial\mathrm{A}'}{\partial u}\cos\Phi\right), \\ \mathrm{A}'r' = \mathrm{A}n' - \dfrac{\partial\Phi}{\partial u'} = \dfrac{1}{\mathrm{A}\sin\Phi}\left(\dfrac{\partial\mathrm{A}'}{\partial u} - \dfrac{\partial\mathrm{A}}{\partial u'}\cos\Phi\right); \end{cases}$$

d'où l'on tire aisément

$$(14) \qquad \begin{cases} \mathrm{A}(n + r) = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial u} - \dfrac{2}{\mathrm{A}'\sin\Phi}\left(\dfrac{\partial\mathrm{A}}{\partial u'} - \dfrac{\partial\mathrm{A}'}{\partial u}\cos\Phi\right), \\ \mathrm{A}'(n' + r') = \dfrac{\partial\Phi}{\partial u'} - \dfrac{2}{\mathrm{A}\sin\Phi}\left(\dfrac{\partial\mathrm{A}'}{\partial u} - \dfrac{\partial\mathrm{A}}{\partial u'}\cos\Phi\right). \end{cases}$$

Il n'y a donc plus qu'à connaître la différence $d\varphi - d\varphi'$.

A cet effet, nous ferons observer que les formules initiales (3), (4) et (5) restent les mêmes, que Φ soit constant ou non. Mais il n'en est pas ainsi du système (6),

car, dans ce second cas, il devient

$$(15)\quad \begin{cases} d(\mathrm{A}\,du)\sin\Phi + (\mathrm{A}\,du)\cos\Phi\,d\Phi \\ \quad = d^2\mathrm{S}\sin\varphi' + d\mathrm{S}\cos\varphi'\,d\varphi', \\ d(\mathrm{A}'\,du')\sin\Phi + (\mathrm{A}'\,du')\cos\Phi\,d\Phi \\ \quad = d^2\mathrm{S}\sin\varphi + d\mathrm{S}\cos\varphi\,d\varphi. \end{cases}$$

Éliminant à nouveau $d^2\mathrm{S}$ et remplaçant dans l'équation résultante, une première fois, $d\varphi'$ par $d\Phi - d\varphi$; une deuxième fois, $d\varphi$ par $d\Phi - d\varphi'$, on obtient, de la sorte, deux équations qui, combinées entre elles, fournissent la différence cherchée, savoir

$$(16)\quad \begin{cases} d\varphi - d\varphi' = \dfrac{2\sin\Phi}{d\mathrm{S}^2}\Big[\mathrm{AA}'(du\,d^2u' - du'\,d^2u) \\ \qquad + \left(\mathrm{A}\dfrac{\partial\mathrm{A}'}{\partial u} - \mathrm{A}'\dfrac{\partial\mathrm{A}}{\partial u}\right)du^2\,du' \\ \qquad + \left(\mathrm{A}\dfrac{\partial\mathrm{A}'}{\partial u'} - \mathrm{A}'\dfrac{\partial\mathrm{A}}{\partial u'}\right)du\;du'^2\Big] \\ \qquad + (\mathrm{A}'^2\,du'^2 - \mathrm{A}^2\,du^2)\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial\Phi}{\partial u'}\,du'\right). \end{cases}$$

Ce point acquis, si l'on compare cette dernière expression avec la formule similaire (7), on reconnaîtra aussitôt que la substitution, actuellement à faire, des valeurs (5), (14) et (16) dans l'équation (12), donnera nécessairement lieu à des calculs de réduction (en majeure partie) *identiques* à ceux qui ont été exécutés dans le premier cas, si bien qu'abstraction faite du facteur 2 (destiné d'ailleurs à disparaître à la fin des opérations) les seuls nouveaux termes à considérer sont ceux qui renferment les dérivées partielles $\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial u'}$. Or il se trouve que ces termes se réduisent à *quatre,* constituant la somme suivante

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}'}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\sin\Phi\,du^3 + \frac{\partial\Phi}{\partial u}\sin\Phi\cos\Phi\,du^2\,du' \\ - \frac{\partial\Phi}{\partial u'}\sin\Phi\cos\Phi\,du\,du'^2 - \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}\frac{\partial\Phi}{\partial u'}\,du'^3,$$

et que tout se réduit, par suite, à les répartir, un par un, dans chacun des quatre coefficients du second membre de (8).

Moyennant ces indications, il nous paraît superflu d'écrire *in extenso* la formule relative à ce second cas. Disons seulement qu'en vertu de ce qui précède, elle ne le cédera pas en symétrie à celle du premier.

Que s'il devenait utile d'y remplacer Φ par le paramètre B'', il suffirait d'adjoindre aux relations (9) celles-ci

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}\sqrt{A^2A'^2-B''^2} = -\frac{\partial B''}{\partial u} + B''\left(\frac{1}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u'}\sqrt{A^2A'^2-B''^2} = -\frac{\partial B''}{\partial u'} + B''\left(\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u'} + \frac{1}{A'}\frac{\partial A'}{\partial u'}\right),$$

dont la première a été signalée déjà dès le premier cas.

Nous terminerons notre travail par la remarque suivante :

Si le *développement* de l'équation différentielle des lignes géodésiques constitue un polynome d'une étendue peu commune, par contre, l'équation elle-même de ces lignes peut être *condensée* dans une formule très simple.

En effet, en développant dans (10) ou (10') les différentielles totales $d\varphi$ et $d\varphi'$, on déduira sans peine de l'un ou l'autre de ces systèmes, joints aux relations (3),

$$\frac{1}{A'}\frac{\partial\varphi}{\partial u'}\sin\varphi - \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi'}{\partial u}\sin\varphi' + n\sin\varphi' + r'\sin\varphi = 0.$$

Substituant à n et à r' leurs valeurs (13), il vient

$$\frac{\partial A}{\partial u'}\cos\varphi - A\frac{\partial\varphi}{\partial u'}\sin\varphi = \frac{\partial A'}{\partial u}\cos\varphi' - A\frac{\partial\varphi'}{\partial u}\sin\varphi',$$

ou, plus simplement,

$$\frac{\partial}{\partial u'}(A\cos\varphi) = \frac{\partial}{\partial u}(A'\cos\varphi'). \tag{17}$$

Telle est, sous sa forme, on peut le dire, la plus simple, l'équation des lignes géodésiques d'une surface donnée. Son interprétation est facile.

On a effectivement, dans tous les cas,

$$dS = ds \cos\varphi + ds' \cos\varphi',$$

et pour les surfaces, en particulier,

$$dS = A \cos\varphi \, du + A' \cos\varphi' \, du'.$$

Or si l'on écrit la condition *d'intégrabilité* de cette valeur de dS, on retombera précisément sur l'équation (17).

[M²4c]

SUR LES SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE QUI ONT DEUX DROITES DOUBLES;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. L'étude des quartiques binodales offre un intérêt spécial, en raison de ce fait que, si les deux points nodaux A et B sont les points à l'infini sur les axes cartésiens Ox et Oy, l'équation de la quartique est la relation *doublement quadratique* la plus générale entre deux variables x et y, soit

$$y^2(ax^2 + 2bx + c) + 2y(a'x^2 + 2b'x + c') \\ + (a''x^2 + 2b''x + c'') = 0;$$

nous nous placerons dans ce dernier cas. De chaque point nodal on peut mener quatre tangentes à la courbe;

soient x_1, x_2, x_3, x_4 les abscisses des tangentes parallèles à Oy, et y_1, y_2, y_3, y_4 les ordonnées des tangentes parallèles à Ox : les indices des y étant mis convenablement, on sait que les deux rapports anharmoniques (x_1, x_2, x_3, x_4) et (y_1, y_2, y_3, y_4) sont égaux; on le démontre en rendant la relation symétrique en x et y par une substitution homographique effectuée sur l'une des variables (trois conditions, trois paramètres), ou en supposant que, au moyen de substitutions homographiques effectuées sur chaque variable, zéro et l'infini sont devenus critiques pour x et aussi pour y, ce qui réduit la relation à la forme simple

$$(fxy + gx + hy + k)^2 - \lambda xy = 0,$$

ou, moins simplement, par un calcul que l'on trouve dans le *Traité des courbes planes* de Salmon.

Il existe généralement soixante-quatre systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique : l'un de ces systèmes est d'ailleurs illusoire, comme étant formé de droites doubles. Des théorèmes généraux donnés par M. Humbert pour les courbes planes (*Journal de Liouville*, 1886) donnent, pour le cas d'une quartique binodale, le résultat suivant :

A. 4×2^2, ou plus exactement $3 \times 2^2 + 1$ systèmes de coniques quadruplement tangentes à la courbe, trois systèmes de l'une des quatre familles étant illusoires;

B. 4×2 systèmes de coniques passant par le point nodal sur Ox et triplement tangentes à la courbe, 4×2 systèmes analogues pour le point nodal sur Oy;

C. 4×1 systèmes de coniques passant par les deux points nodaux et doublement tangentes à la courbe. Chaque système B compte pour deux, chaque système C compte pour quatre, et l'on retrouve les soixante-quatre systèmes. Voici quelques détails sur ces systèmes.

A. Le système particulier de coniques quadruplement tangentes à la quartique est celui qui contient la droite double AB, A et B étant les points doubles de la courbe; on l'obtient en mettant l'équation de la quartique sous la forme

$$(a) \qquad (axy + a'x + by)^2 - U = 0,$$

U étant le premier membre de l'équation d'une conique, de sorte que la quartique est l'enveloppe des coniques

$$(a') \qquad \lambda^2 U + 2\lambda(axy + a'x + by) + 1 = 0;$$

les coniques de ce système jouissent d'une propriété remarquable (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXV, p. 265) : la correspondance entre une tangente à la conique et un point de la quartique situé sur cette tangente, correspondance d'espèce (2, 4), se décompose en deux correspondances (1, 2).

Les autres systèmes s'obtiennent en mettant l'équation de la quartique sous la forme

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} (fxy + gx + hy + k)^2 \\ \qquad - (x^2 + 2px + q)(y^2 + 2p'y + q') = 0, \end{cases}$$

ce qui est possible de douze façons; les racines du trinome en x sont, par exemple, x_1 et x_2, ou x_3 et x_4, au sens déjà mentionné, et celles du trinome en y peuvent être alors y_1 et y_2, ou y_3 et y_4 : on s'en assure aisément en supposant que, par des substitutions homographiques, on réduise le produit des deux trinomes à être $4xy$, comme on l'a dit plus haut; on a donc trois familles de quatre solutions; la quartique est alors l'enveloppe des coniques

$$(\alpha') \qquad \begin{cases} \lambda^2(x^2 + 2px + q) + 2\lambda(fxy + gx + hy + k) \\ \qquad - (y^2 + 2p'y + q' = 0. \end{cases}$$

B. On peut mettre l'équation de la courbe sous la forme

$$(b)\quad \begin{cases} (axy + a'x + \lambda y + \mu)^2 \\ \qquad - (Ny^2 + Px + Qy + R)(x - x_1) = 0, \end{cases}$$

et les relations qui donnent finalement x_1, λ et μ sont de la forme

$$(\lambda + ax_1)^2 = \varphi(x_1), \qquad (\mu + a'x_1)^2 = \psi(x_1),$$
$$(\lambda + ax_1)(\mu + a'x_1) = \chi(x_1);$$

lorsqu'on a choisi x_1, qui est l'abscisse d'une tangente parallèle à Oy, on voit que l'on a deux solutions pour λ et μ; on a donc 4×2 solutions; la quartique est alors l'enveloppe des coniques

$$(b')\quad \begin{cases} \lambda^2(Ny^2 + Px + Qy + R) \\ \qquad + 2\lambda(axy + a'x + \lambda y + \mu) + (x - x_1) = 0, \end{cases}$$

et ces coniques passent par le point nodal à l'infini sur Ox. On a de même les systèmes de coniques passant par le point nodal sur Ox.

C. L'équation (α) de la quartique, quand on décompose chaque trinome en deux facteurs, montre qu'elle est encore l'enveloppe des coniques

$$(c')\quad \begin{cases} \lambda^2(x - x_1)(y - y_1) + 2\lambda(fxy + gx + hy + k) \\ \qquad + (x - x_2)(y - y_2) = 0, \end{cases}$$

lesquelles passent par les deux points nodaux. Ce système de coniques comprend quatre coniques évanouissantes $(x - x_i)(y - y_j) = 0$, les valeurs de i et j étant (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4); on sait que les points doubles de ces quatre coniques évanouissantes sont sur une conique passant par les points doubles de la quartique. Le rapport anharmonique $r(1, 2, 3, 4)$ pouvant encore s'écrire $r(2, 1, 4, 3)$, $r(3, 4, 1, 2)$, $r(4, 3, 2, 1)$,

il existe quatre systèmes de coniques passant par les points nodaux de la quartique et doublement tangentes à la courbe; pour le second, par exemple, les valeurs de i et j sont (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3).

II.

L'application suivante des considérations qui précèdent a été inspirée par une Note de M. Raoul Bricard, parue au *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXV, p. 180.

2. Soit S une surface du quatrième ordre ayant *deux droites doubles* AB, CD; tout plan m qui passe par CD coupe la surface suivant deux droites qui se coupent en M sur AB, et la surface est une surface réglée (quatrième ordre, quatrième classe); dans la classification des surfaces réglées du quatrième ordre, donnée par Cayley, ces surfaces forment la première espèce : on n'a d'ailleurs pas à supposer que la surface est réglée, si l'on suppose qu'elle a deux droites doubles, cette dernière hypothèse entraînant la première. Pour chacune des génératrices G ou MN, on a relativement à AB un point d'appui M et un plan d'angle n, relativement à CD un point d'appui N et un plan d'angle m; on peut désigner la droite par l'une quelconque des notations (M, N), (m, n), (M, n), (m, N), la notation (M, n) par exemple se rapportant surtout à l'arête AB; nous attacherons aux deux systèmes (M, m) et (N, n) deux paramètres α et β ayant avec eux une correspondance univoque. Les deux paramètres α et β sont liés par une correspondance doublement quadratique; avec un tétraèdre de référence ABCD, dont deux arêtes opposées sont dirigées

suivant les deux droites données, on peut écrire

$$(G) \qquad x = \alpha y, \qquad z = \beta t;$$

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \beta^2(a\alpha^2 + 2b\alpha + c) \\ + 2\beta(a'\alpha^2 + 2b'\alpha + c') \\ + \quad (a''\alpha^2 + 2b''\alpha + c'') = 0, \end{array} \right.$$

et l'équation de la surface est

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{l} z^2(ax^2 + 2bxy + cy^2) \\ + 2zt(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2) \\ + \quad t^2(a''x^2 + 2b''xy + c''y^2) = 0; \end{array} \right.$$

on trouve cette équation au Chapitre XVI du *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* de Salmon. On aurait l'équation tangentielle en regardant la droite MN comme la droite qui joint les deux points $v = -\alpha u$, $r = -\beta w$, ce qui conduit à remplacer dans l'équation ponctuelle x et y par v et $-u$, z et t par r et $-w$.

3. Soient α_1, α_2, α_3, α_4 les valeurs critiques de α, c'est-à-dire les valeurs de cette variable qui donnent pour β deux valeurs égales; il existe de même quatre valeurs critiques de β, et, en mettant convenablement les indices des β critiques, les deux rapports anharmoniques $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ sont égaux. Les deux plans tangents n et n' à la surface S en un point M de AB′ étant déterminés par les deux génératrices (M, N) et (M, N′), les deux points de contact N et N′ d'un plan m passant par CD étant déterminés par les deux génératrices (m, n) et (m, n'), les quatre points critiques M_1, M_2, M_3, M_4 sont des points pincés de la surface, les quatre plans m_1, m_2, m_3, m_4 qui passent par ces points sont des plans pincés; on a de même quatre points pincés N'_i sur CD, quatre plans pincés n'_i passant

par AB, l'accent indiquant que les points M_1 et N'_1 ne correspondent pas à une même génératrice.

4. D'après ce que l'on a vu au § I, la relation (1) peut se mettre de douze façons sous la forme (α) dans laquelle on remplace x et y par α et β; l'équation de la surface S peut donc se mettre de douze manières sous la forme

$$(fxz + gxt + hyz + kyt)^2 \\ - (x^2 + 2pxy + qy^2)(z^2 + 2p'zt + q't^2) = 0;$$

pour chacune de ces douze façons, la surface S *est enveloppe de quadriques ayant pour équation générale*

$$\lambda^2(x^2 + 2pxy + qy^2) \\ + 2\lambda(fxz + gxt + hyz + kyt) + (z^2 + 2p'zt + q't^2) = 0;$$

on aurait l'équation tangentielle des quadriques d'un autre système en remplaçant x et y par v et $-u$, z et t par r et $-w$. Les quadriques d'un système coupent AB et CD en des points fixes, points pincés de la surface, qui seront, par exemple, M_1, M_2, N'_1, N'_2, et sont tangentes à quatre plans pincés qui sont, dans l'hypothèse que l'on vient de faire, m_3, m_4, n'_3, n'_4; cela constitue d'ailleurs sept conditions, et non huit, en raison de l'égalité des rapports anharmoniques (M_1, M_2, M_3, M_4) et (N'_1, N'_2, N'_3, N'_4). Les quatre génératrices M_1N_1, M_2N_2, $N'_1M'_1$, $N'_2M'_2$ de la surface S sont à la quadrique

$$fxz + gxt + hyz + kyt = 0,$$

et l'on a

$$(M_1, M_2, M'_1, M'_2) = (N_1, N_2, N'_1, N'_2).$$

Les quadriques considérées ont d'ailleurs huit points communs; en les rapportant au tétraèdre $M_1M_2N'_1N'_2$, ce qui donne leur équation sous la forme simple

$$\lambda^2xy + \lambda(fxz + gxt + hyz + kyt) + zt = 0.$$

et en coupant par la droite $y = 0$, $fz + gt = 0$, on voit qu'elles sont tangentes en M_1 à cette droite qui est la génératrice $M_1 N_1$; elles sont de même tangentes en M_2 à la génératrice $M_2 N_2$, en N'_1 à la génératrice $N'_1 M'_1$, ...; ce fait résulte directement de ce que les quadriques sont tangentes à toutes les droites MN. Corrélativement, ces quadriques sont tangentes au plan m_3 en un point de la droite fixe (m_3, n_3), ...

5. Aux coniques (c') du § I correspondraient des quadriques passant par AB et CD et se raccordant avec la surface S le long de deux génératrices; on aurait quatre systèmes de telles quadriques. Le rattachement de ces quadriques à celles déjà obtenues est une conséquence du fait suivant : Une surface du quatrième ordre dont l'équation peut prendre la forme

$$S^2 - 4\alpha\beta\gamma\delta = 0,$$

où α, β, γ, δ sont linéaires en x, y, z, t, est, de trois manières différentes, enveloppe de quadriques.

III.

Ce qui suit est emprunté à la Note de M. Bricard rappelée plus haut, et à une Communication orale par laquelle ce géomètre a complété cette Note (juin 1899).

6. Les quartiques binodales qui ont pour points doubles deux points donnés A et B, et qui passent par sept points donnés, ont un huitième point commun; elles dépendent en effet d'un seul paramètre $(14 - 6 - 7 = 1)$, de sorte que leur équation générale est $S + \lambda S' = 0$. On peut dire :

1° *Une relation doublement quadratique est déterminée par huit solutions;*

2° *Les relations doublement quadratiques, en nombre infini, qui admettent sept solutions données, ont une huitième solution commune.*

7. Si l'on considère les droites G qui rencontrent deux droites données AB, CD, et sont tangentes à une quadrique donnée Q_0, les points d'appui M et N sont liés par une correspondance doublement quadratique. On a d'abord ceci :

1° *Les quadriques* Q *qui sont tangentes à huit droites rencontrant deux droites données sont aussi tangentes à une infinité d'autres droites rencontrant les deux droites données;*

2° *Les quadriques* Q *qui sont tangentes à sept droites rencontrant deux droites données sont tangentes à une huitième droite rencontrant les deux droites données.*

Ces théorèmes de M. Bricard sont analogues à des théorèmes bien connus qui ont été donnés par Lamé.

8. L'auteur obtient ainsi, en partant de la quadrique Q_0, les droites obtenues au n° 2 comme génératrices d'une surface du quatrième ordre ayant deux droites doubles, et les quadriques Q tangentes à ces droites; il montre d'ailleurs, au moyen des fonctions elliptiques, que la surface S, lieu des droites G et enveloppe des quadriques Q, est du quatrième ordre. Il ne signale pas l'existence des *douze systèmes de quadriques* Q, mais les considérations par lesquelles il établit le théorème concernant une quadrique, qui termine la Note, donnent immédiatement ces douze systèmes; les points d'appui M, qui sont critiques sur AB, sont d'une

part les deux points d'intersection de AB et de Q_0, d'autre part, les deux points où AB est rencontrée par les plans tangents à Q_0 menés par CD; on obtient de même les points d'appui critiques sur CD; dès lors, les quadriques Q d'un système passent par exemple par les points critiques M_1, M_2, N'_1, N'_2, et sont tangentes aux quatre plans critiques m_3, m_4, n'_3, n'_4; il y aurait seulement à montrer que le groupement des éléments critiques est réglé par une égalité de rapports anharmoniques, ce qui est d'ailleurs facile. Le fait que les quadriques du système considéré sont tangentes en M_1, M_2, N'_1, N'_2 aux droites M_1N_1, M_2N_2, $N'_1M'_1$, $N'_2M'_2$, et le fait corrélatif, sont ici en évidence.

[K13a]

SUR LA SIMPLIFICATION DES FORMULES D'ANGLES ET DE DISTANCES EN GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE;

PAR M. L. RIPERT.

Nous supposons connues les formules métriques relatives aux éléments du premier ordre en *coordonnées obliques;* nous nous proposons d'indiquer un moyen de simplifier leurs formes et, par suite, d'en faciliter l'application. Nous nous abstiendrons en général de démonstrations, la plupart d'entre elles ne différant pas, une fois les notations adoptées, de celles qui sont classiques.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

1. Par rapport au trièdre coordonné

$$Oxyz\,(yOz = \lambda,\ zOx = \mu,\ xOy = \nu),$$

les équations

$$\left(\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}\right)$$

d'une droite D peuvent s'écrire sous la forme *détriplée*

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{cases} \mathrm{A}(y,z)=cy-bz-(c\beta-b\gamma)=0,\\ \mathrm{B}(z,x)=az-cx-(a\gamma-c\alpha)=0,\\ \mathrm{C}(x,y)=bx-ay-(b\alpha-a\beta)=0. \end{cases}$$

Ce sont les équations des plans projetant D sur les trois plans coordonnés. Deux de ces équations sont nécessaires et suffisantes pour déterminer D; mais on peut dire aussi que D est représentée par les *trois équations* $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{B}=0$, $\mathrm{C}=0$, étant entendu que deux quelconques entraînent la troisième, ou, ce qui revient au même, qu'elles sont liées par la relation

$$\mathrm{A}a+\mathrm{B}b+\mathrm{C}c=a.$$

Une seconde droite

$$\mathrm{D}'\left(\frac{x-\alpha'}{a'}=\frac{y-\beta'}{b'}=\frac{z-\gamma'}{c'}\right)$$

sera représentée de même par les trois équations

$$\mathrm{A}'=0,\qquad \mathrm{B}'=0,\qquad \mathrm{C}'=0.$$

Nous prendrons l'équation d'un plan P sous la forme

$$\mathrm{P}(x,y,z)=ux+vy+wz+r=0,$$

la même équation accentuée représentant un second plan P′, ...

2. Nous désignons la fonction sphérique par $\Phi(x,y,z)$, son discriminant par Δ et la fonction adjointe par $\Psi(x,y,z)$. En d'autres termes, nous posons

$$\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu,$$

$$\Delta=1+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu,$$

$$\Psi(x,y,z)=\Sigma\, x^2\sin^2\lambda+2\Sigma\, yz(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda).$$

On sait que, $Oxyz$ étant un véritable trièdre, Δ est toujours compris entre 0 et 1; on peut donc poser $\Delta = \sin^2\Theta$; $\sin\Theta$ est dit le *sinus du trièdre des coordonnées*.

ANGLES ET PERPENDICULARITÉ.

3. Les angles de deux droites (D, D′), ou de deux plans (P, P′), ou d'une droite (D) et d'un plan (P), sont respectivement donnés par les formules

$$(1)\qquad \cos(D, D') = \pm \frac{a'\Phi'_a + b'\Phi'_b + c'\Phi'_c}{2\sqrt{\Phi(a, b, c)\,\Phi(a', b', c')}},$$

$$(2)\qquad \cos(P, P') = \pm \frac{u'\Psi'_u + v'\Psi'_v + w'\Psi'_w}{2\sqrt{\Psi(u, v, w)\,\Psi(u', v', w')}},$$

$$(3)\qquad \sin(D, P) = \pm \frac{(au + bv + cw)\sin\Theta}{\sqrt{\Phi(a, b, c)\,\Psi(u, v, w)}}.$$

La condition de perpendicularité de (D, D′) ou de (P, P′) résulte immédiatement des formules (1) et (2). Les conditions de perpendicularité de D et de P, beaucoup plus faciles à déduire des formules (1) et (2) [1] que de la formule (3) peuvent s'écrire indifféremment sous les deux formes

$$(4)\qquad \frac{\Phi'_a}{u} = \frac{\Phi'_b}{v} = \frac{\Phi'_c}{w} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{\Psi'_u} = \frac{b}{\Psi'_v} = \frac{c}{\Psi'_w}.$$

Les équations de direction des plans P perpendiculaires à D et des droites D perpendiculaires à P sont respectivement

$$(5)\qquad \Phi'_a x + \Phi'_b y + \Phi'_c z = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{\Psi'_u} = \frac{y}{\Psi'_v} = \frac{z}{\Psi'_w}.$$

---

[1] On trouve très aisément les deux formes en exprimant que : 1° une droite *arbitraire* parallèle à P est perpendiculaire à D; 2° un plan *arbitraire* parallèle à D est perpendiculaire à P (*voir* au n° 2).

L'équation du plan mené par D perpendiculairement à P est

$$(6) \qquad A\Psi'_u + B\Psi'_v + C\Psi'_w = 0.$$

4. La projection orthogonale (x_d, y_d, z_d) du point (x_1, y_1, z_1) sur D et la projection orthogonale (x_p, y_p, z_p) du même point sur P ont respectivement leurs coordonnées données par

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x_d - \alpha}{a} &= \frac{y_d - \beta}{b} = \frac{z_d - \gamma}{c} \\ &= \frac{\Phi'_a(x_1 - \alpha) + \Phi'_b(y_1 - \beta) + \Phi'_c(z_1 - \gamma)}{2\Phi(a, b, c)}, \end{aligned} \right.$$

$$(8) \qquad \frac{x_p - x_1}{\Psi'_u} = \frac{y_p - y_1}{\Psi'_v} = \frac{z_p - z_1}{\Psi'_w} = -\frac{P(x_1, y_1, z_1)}{2\Psi(u, v, w)}.$$

La projection orthogonale de D sur P résulte de la formule (6).

DISTANCES.

5. La distance du point (x_1, y_1, z_1) au plan P est (en valeur absolue)

$$(9) \qquad \Delta_P = \frac{P(x_1, y_1, z_1)\sin\Theta}{\sqrt{\Psi(u, v, w)}},$$

d'où il résulte que : 1° le volume d'un parallélépipède dont a, b, c sont trois arêtes contiguës faisant deux à deux les angles λ, μ, ν, est

$$(10) \qquad V = abc\sin\Theta;$$

2° la distance des plans parallèles

$$\left(ux - vy + wz = \begin{cases} r = 0 \\ r' = 0 \end{cases}\right)$$

est

$$(11) \qquad \Delta_{PP} = \frac{(r - r')\sin\Theta}{\sqrt{\Psi(u, v, w)}};$$

3° la plus courte distance de deux droites D, D′ est

$$(12)\qquad \Delta_{DD'} = \frac{[L(\alpha-\alpha')+M(\beta-\beta')+N(\gamma-\gamma')]\sin\theta}{\sqrt{\Psi(L, M, N)}}$$

où

$$L = bc' - cb', \qquad M = ca' - ac', \qquad N = ab' - ba'.$$

6. Les équations de la perpendiculaire commune à D et D′ sont [formule (6)]

$$(13)\qquad A\Psi'_L + B\Psi'_M + C\Psi'_N = 0, \qquad A'\Psi'_L + B'\Psi'_M + C'\Psi'_N = 0.$$

7. *La distance du point* (x_1, y_1, z_1) *à la droite* D *est donnée par la formule*

$$(14)\qquad \Delta_D = \sqrt{\frac{\Psi[A(y_1, z_1), B(z_1, x_1), C(x_1, y_1)]}{\Phi(a, b, c)}}.$$

Démontrons directement cette formule de forme nouvelle :

On reconnaît aisément (¹) que les coordonnées [formule (7)] de la projection de (x_1, y_1, z_1) sur D peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{x_d - x_1}{B\Phi'_c - C\Phi'_b} = \frac{y_d - y_1}{C\Phi'_a - A\Phi'_c} = \frac{z_d - z_1}{A\Phi'_b - B\Phi'_a} = \frac{1}{2\Phi(a, b, c)},$$

où A, B, C représentent respectivement $A(y_1, z_1)$, $B(z_1, x_1)$, $C(x_1, y_1)$.

La distance cherchée de (x_1, y_1, z_1) à D est

$$\Delta_D = \sqrt{\Phi(x_d - x_1, y_d - y_1, z_d - z_1)},$$

c'est-à-dire

$$\Delta_D = \frac{1}{2\Phi(a, b, c)}\sqrt{\Sigma(B\Phi'_c - C\Phi'_b)^2 + 2\Sigma(C\Phi'_a - A\Phi'_c)(A\Phi'_b - B\Phi'_a)\cos\lambda},$$

(¹) A cause des identités

$$a\Sigma\Phi'_a(x_1 - \alpha) = (B\Phi'_c - C\Phi'_b) \cdots \frac{1}{2\Phi(a, b, c)}.$$

ou, en développant, ordonnant par rapport à A, B, C, et simplifiant

$$\Delta_D = \frac{1}{\Phi(a, b, c)}$$
$$\times \sqrt{\begin{array}{l}\Sigma[\Phi(a, b, c)\sin\lambda - a^2\Delta]A^2 \\ \quad - 2\Sigma[\Phi(a, b, c)\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) - bc\Delta]BC\end{array}}$$
$$= \frac{1}{\Phi(a, b, c)}\sqrt{\Phi(a, b, c)\Psi(A, B, C) - \Delta(Aa + Bb + Cc)^2}.$$

ou, finalement, à cause de $Aa + Bb + Cc \equiv 0$,

$$\Delta_D = \sqrt{\frac{\Psi(A, B, C)}{\Phi(a, b, c)}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

8. *Application.* — Pour montrer la facilité d'application des formules qui précèdent, démontrons le théorème suivant :

Le volume d'un tétraèdre, donné par les coordonnées de ses sommets, est égal, en valeur absolue, au produit du premier membre de la condition qui exprimerait que les quatre sommets sont dans un même plan par le sixième du sinus du tétraèdre des coordonnées.

En effet, soit le tétraèdre 1-2-3-4. L'arête 3-4 dont la longueur est

$$l = \sqrt{\Phi(x_3 - x_4, y_3 - y_4, z_3 - z_4)},$$

a pour équations détriplées (1, D)

$$A(y, z) = \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$B(z, x) = \begin{vmatrix} z & x & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \\ z_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La distance du point 2 à cette droite 3-4 est [formule (14)]

$$h = \sqrt{\frac{\Psi[A(y_2, z_2), B(z_2, x_2), C(x_2, y_2)]}{\Phi(x_3 - x_4, y_3 - y_4, z_3 - z_4)}}.$$

L'aire $\left(\frac{1}{2} lh\right)$ de la base 2-3-4 est donc

$$A_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\Psi[A(y_2, z_2), B(z_2, x_2), C(x_2, y_2)]}.$$

Le plan de cette base a pour équation

$$P = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= A(y_2, z_2)x + B(z_2, x_2)y + C(x_2, y_2)z - (x_2, y_3, z_4) = 0$$

et la hauteur H_1, distance du sommet 1 à ce plan, est [formule (9)]

$$H_1 = \pm \frac{P(x_1, y_1, z_1)\sin\Theta}{\sqrt{\Psi[A(y_2, z_2), B(z_2, x_2), C(x_2, y_2)]}}.$$

Le volume $\left(V = \frac{1}{3} A_1 H_1\right)$ du tétraèdre est donc

$$(15) \qquad V = \pm \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \sin\Theta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

COMPARAISON AVEC LES FORMULES DE GÉOMÉTRIE PLANE.

9. Plücker, dans sa *Neue Geometrie des Raumes* (Teubner, Leipzig, 1866), divise les droites du plan en deux espèces : celles dont l'équation est de la forme $\left(\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b}\right)$ qu'il appelle *rayons*, et celles dont l'équation est de la forme $(ux + vy + r = 0)$ qu'il appelle *axes*. Géométriquement, le *rayon* est la droite dirigée, menée d'un point fini (α, β) au point de l'infini

$(a, b, 0)$; l'*axe* est la trace sur le plan fondamental d'un plan quelconque; c'est aussi la droite de jonction de deux points pris sur les axes coordonnés $\left(-\frac{r}{u}, 0\right)$ et $\left(0, -\frac{r}{v}\right)$.

Si, d'après cette conception de Plücker, nous prenons l'équation d'une droite du plan sous les deux formes

$$d(xy) = bx - ay - (b\alpha - a\beta) = 0,$$
$$p(x, y) = ux + vy + r = 0,$$

et si nous posons (avec $xOy = \theta$)

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + 2\cos\theta\, xy, \quad \psi(x, y) = x^2 + y^2 - 2\cos\theta\, xy,$$

il n'est pas sans intérêt de comparer les formules qui viennent d'être établies avec les suivantes (les numéros se correspondant)

$$(1) \qquad \cos(d, d') = \pm \frac{a'\varphi'_a + b'\varphi'_b}{2\sqrt{\varphi(a, b)\,\varphi(a', b')}},$$

$$(2) \qquad \cos(p, p') = \pm \frac{u'\psi'_u + v'\psi'_v}{2\sqrt{\psi(u, v)\,\psi(u', v')}},$$

$$(3) \qquad \sin(d, p) = \pm \frac{(au + bv)\sin\theta}{\sqrt{\varphi(a, b)\,\psi(u, v)}},$$

$$(4) \qquad \frac{\varphi'_a}{u} = \frac{\varphi'_b}{v} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\psi'_u} = \frac{b}{\psi'_v},$$

$$(5) \qquad \varphi'_a x + \varphi'_b y = 0, \qquad \frac{x}{\psi'_u} = \frac{y}{\psi'_v},$$

$$(7) \qquad \frac{x_d - \alpha}{a} = \frac{y_d - \beta}{b} = \frac{\varphi'_a(x_1 - \alpha) + \varphi'_b(y_1 - \beta)}{2\varphi(a, b)},$$

$$(8) \qquad \frac{x_p - x_1}{\psi'_u} = \frac{y_p - y_1}{\psi'_v} = -\frac{p(x_1, y_1)}{2\psi(u, v)},$$

$$(9) \qquad S_p = \frac{p(x_1, y_1)\sin\theta}{\sqrt{\psi(u, v)}},$$

$$(10) \qquad \mathcal{A}_0 = ab\sin\theta,$$

$$(15) \qquad \mathcal{A}_0 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\sin\theta.$$

Il nous paraît évident que si ces formules, conséquence de la conception de Plücker, étaient établies sous cette forme en Géométrie plane, elles faciliteraient considérablement le passage des deux aux trois dimensions, surtout si l'on a soin de les *démontrer d'une manière correspondante*. Par exemple, les formules (4) peuvent se déduire de la formule (3); mais il est préférable [et même plus simple (¹)] de les démontrer, comme leurs analogues de l'espace par les formules (1) et (2). On peut dire, dans les deux cas :

1° Un rayon *arbitraire* (a', b') sera perpendiculaire à d et parallèle à p si l'on a

$$a'\varphi'_a + b'\varphi'_b = 0,$$
$$a'u + b'v = 0,$$

Une droite *arbitraire* (a', b', c') sera perpendiculaire à D et parallèle à P si l'on a

$$a'\Phi'_a + b'\Phi'_b + c'\Phi'_c = 0,$$
$$a'u + b'v + c'w = 0,$$

conditions qui doivent subsister quels que soient a', b', (c'). Donc

$$\frac{\varphi'_a}{u} = \frac{\varphi'_b}{v}.$$

$$\frac{\Phi'_a}{u} = \frac{\Phi'_b}{v} = \frac{\Phi'_c}{w}.$$

2° Un axe arbitraire (u', v') sera parallèle à d et perpendiculaire à p si l'on a

$$\sum u'a = 0, \qquad \sum u'\psi'_u + 0.$$

Donc

$$\frac{a}{\psi'_u} = \frac{b}{\psi'_v},$$

Un plan arbitraire (u, v, w) sera parallèle à D et perpendiculaire à P si l'on a

$$\sum u'a = 0, \qquad \sum u'\Psi'_u = 0.$$

Donc

$$\frac{a}{\Psi'_u} = \frac{b}{\Psi'_v} = \frac{c}{\Psi'_w}.$$

(¹) « C'est une remarque que l'on peut faire souvent dans l'étude de la Géométrie, que les solutions de la Géométrie plane, qui ont leurs analogues dans l'espace, sont toujours les plus générales et les plus simples. » (CHASLES, *Aperçu historique*, 3e édition, p. 45.) Le fait est peut-être plus frappant encore quand on se place au point de vue analytique : l'analogie des solutions est souvent alors voisine de l'identité.

UTILITÉ DE LA FORME DÉTRIPLÉE (D).

10. La forme (D) du n° 1 et sa forme corrélative (où $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ sont les équations des points communs à D et aux plans coordonnés) ont de très nombreuses applications. Nous nous bornerons aux exemples suivants :

1° L'équation de l'hyperboloïde déterminé par les trois droites D_1, D_2, D_3 et celle du paraboloïde déterminé par D_1, D_2 et le plan directeur P, sont respectivement

$$(a) \qquad (A_1, B_2, C_3) = 0$$

et

$$(b) \qquad (A_1, B_2, w) = 0,$$

l'hyperboloïde (a) devenant paraboloïde si l'on a

$$(a_1, b_2, c_3) = 0.$$

Si l'on change de nom les coordonnées, l'équation (a) conserve la même signification, l'hyperboloïde passant par l'origine avec $(a_1, b_2, c_3) = 0$. L'équation (b) représente la quadrique réglée ayant pour directrices D_1 et D_2 est telle que les plans de jonction des génératrices à l'origine passent par le point de l'infini $P(u, v, w, 0)$.

2° *L'équation ponctuelle du système des m plans tangents, menés par la droite* D *à la surface de* $m^{\text{ième}}$ *classe* $F(U, V, W, R) = 0$, *est*

$$(c) \qquad F(A, B, C, P_0) = 0,$$

où $P_0 = -(A\alpha + B\beta + C\gamma)$ est le premier membre de l'équation du plan de jonction de D à l'origine.

En effet, un plan passant par D a pour équation

$$A + \lambda B = -\lambda c x - c y + (\lambda a - b) z$$
$$+ \lambda (c\alpha - a\gamma) + b\gamma - c\beta = 0,$$

et sera tangent à la surface si l'on a

$$F[-\lambda c,\ c,\ \lambda a - b,\ \lambda(c\alpha - a\gamma) + b\gamma - c\beta] = 0.$$

En éliminant λ entre cette condition et $A + \lambda B = 0$, on trouve l'équation (c).

En changeant de nom les coordonnées, P_0 devient le point à l'infini de D, et l'équation (c) représente le système des m points d'intersection de D avec la surface de $m^{\text{ième}}$ ordre dont l'équation ponctuelle est $F = 0$.

3° En introduisant la notation pluckérienne

$$c\beta - b\gamma = l, \qquad a\gamma - c\alpha = m, \qquad b\alpha - a\beta = n,$$

on voit que : 1° si $(x, y, z, 1)$ représente un point donné, l'équation ponctuelle (c) devient celle du complexe des tangentes au cône circonscrit ayant ce point pour sommet; 2° si $(x, y, z, 1)$ sont les coordonnées d'un plan donné, l'équation tangentielle (c) devient celle du complexe des droites coupant la section de la surface par ce plan.

[B7b]

SUR LES INVARIANTS DE LA FORME BIQUADRATIQUE BINAIRE;

PAR M. V. JAMET.

1. Je me propose de montrer comment la méthode de Ferrari, pour la résolution de l'équation du quatrième degré, fait connaître les invariants proprement dits de la forme biquadratique binaire, et aussi les coefficients

de l'équation aux rapports anharmoniques des racines de l'équation biquadratique.

M. Niewenglowski, dans son *Cours d'Algèbre*, tome II, page 453, fait observer que l'équation résolvante de Ferrari admet pour racines les valeurs que prend l'expression

$$x_1 x_2 + x_3 x_4,$$

lorsqu'on y remplace, de toutes les manières possibles, x_1, x_2, x_3, x_4 par les racines de l'équation biquadratique proposée. On peut adapter comme il suit, aux formes biquadratiques binaires, la remarque que nous venons d'énoncer.

2. Soit

$$f = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

une forme biquadratique donnée. On aura identiquement

$$(1)\quad \begin{cases} af = (ax^2 + 2bxy + hy^2)^2 \\ \qquad - [2(-3ac + 2b^2 + ah)x^2 + 4(bh - ad)xy + (h^2 - ae)y^2]y^2 \end{cases}$$

et la forme proposée sera décomposée en une différence de carrés ou en un produit de deux formes quadratiques binaires, si l'on a

$$(2)\quad 2(bh - ad)^2 - (-3ac + 2b^2 + ah)(h^2 - ae) = 0.$$

Soit h une racine de cette équation, telle qu'on ait

$$h^2 - ae \neq 0.$$

On pourra transformer l'identité (1) comme il suit :

$$af = (ax^2 + 2bxy + hy^2)^2$$
$$- \frac{y^2}{h^2 - ae}[2(bh - ad)x + (h^2 - ae)y)]^2$$

ou bien

$$af = \left[ax^2 + 2\left(b + \frac{bh - ad}{\sqrt{h^2 - ae}}\right)xy + (h + \sqrt{h^2 - ae})y^2\right]$$
$$\left[ax^2 + 2\left(b - \frac{bh - ad}{\sqrt{h^2 - ae}}\right)xy + (h - \sqrt{h^2 - ae})y^2\right],$$

et l'on voit que si l'équation

$$f(x, 1) = 0,$$

admet pour racines x_1, x_2, x_3, x_4, on aura, par exemple,

$$\frac{h + \sqrt{h^2 - ae}}{a} = x_1 x_3, \qquad \frac{h - \sqrt{h^2 - ae}}{a} = x_3 x_4,$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad x_1 x_2 + x_3 x_4 = \frac{h}{2a}.$$

3. Cette relation subsiste si l'on suppose $h^2 - ae = 0$. Car alors on trouve aussi, en vertu de (2),

$$bd - ah = 0$$

et l'identité (1) devient

$$af = \left[ax^2 + 2(b + \sqrt{3ac - 2b^2 - ah})xy + hy^2\right]$$
$$\left[ax^2 + 2(b - \sqrt{3ac - 2b^2 - ah})xy + hy^2\right].$$

On en déduit encore la relation (3); et celle-ci entraîne, comme conséquence, la remarque énoncée plus haut, à condition que dans l'équation (2) on fasse la substitution $h = 2at$.

4. Supposons maintenant qu'on ait décomposé la forme f en un produit de deux facteurs quadratiques, savoir :

$$(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)(\alpha' x^2 + 2\beta' xy + \gamma' y^2);$$

on sait que les expressions

$$\beta^2 - \alpha\gamma, \quad \beta'^2 - \alpha'\gamma'$$

sont des invariants du second ordre, de telle sorte que leur produit est un invariant de quatrième ordre. Mais si les équations

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0, \qquad \alpha' x^2 + 2\beta' x + \gamma' = 0$$

ont pour racines, respectivement x_1, x_2, et x_3, x_4, on aura

$$\beta^2 - \alpha\gamma = \frac{\alpha^2}{4}(x_1 - x_2)^2,$$

$$\beta'^2 - \alpha'\gamma' = \frac{\alpha'^2}{4}(x_3 - x_4)^2$$

et

$$(\beta^2 - \alpha\gamma)(\beta'^2 - \alpha'\gamma') = \frac{\alpha^2\alpha'^2}{16}(x_1 - x_2)^2(x_3 - x_4)^2$$

$$= \frac{a^2}{16}(x_1x_3 + x_2x_4 - x_2x_3 - x_1x_4)^2.$$

Soient h_1, h_2, h_3 les racines de l'équation (2). On en déduira

$$(\beta^2 - \alpha\gamma)(\beta'^2 - \alpha'\gamma') = \frac{1}{64}(h_1 - h_2)^2$$

et $(h_1 - h_2)^2$ sera un invariant du quatrième ordre, ainsi que $(h_1 - h_3)^2$ et $(h_2 - h_3)^2$. Donc la somme

$$(h_1 - h_2)^2 + (h_2 - h_3)^2 + (h_3 - h_1)^2$$

sera elle-même un invariant du quatrième ordre. Or cette somme est égale à

$$2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 - h_1h_2 - h_2h_3 - h_3h_1)$$

ou bien à

$$(4) \qquad 2[(h_1 + h_2 + h_3)^2 - 3(h_1h_2 + h_2h_3 + h_1h_3)].$$

Mais l'équation (2) se développe comme il suit :

$$h^3 - 3ch^2 + (4bd - ac)h - 2ad^2 + 3ace - 2eb^2 + c^3 = 0.$$

Donc l'expression (4) est égale, à un facteur numérique près, à

$$3c^2 - 4bd + ae,$$

et celle-ci est un invariant du quatrième ordre.

5. Le produit

$$(h_1 - h_2)^2 (h_2 - h_4)^2 (h_3 - h_1)^2$$

est aussi, d'après ce qui précède, un invariant du douzième ordre. Mais, pour calculer ce produit, il est à propos de transformer l'équation (2) comme il suit :

$$(h - c)^3 + (4bd - ae - 3c^2)h - 2ad^2 + 3ace - 2eb^2 + c^3 = 0$$

ou bien

$$\begin{aligned}(h - c)^3 &+ (4bd - ae - 3c^2)(h - c) \\ &- 2ad^2 + 2ace - 2eb^2 - 2c^3 + 4bdc = 0;\end{aligned}$$

puis, en posant

$$\begin{aligned} h - c = \lambda, \qquad 4bd - ae - 3c^2 &= -S, \\ ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 &= T, \end{aligned}$$

on trouvera finalement

$$\lambda^3 - S\lambda + 2T = 0.$$

Si les racines de cette dernière équation sont $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, on trouvera

$$\begin{aligned}&(h_1 - h_2)^2 (h_2 - h_3)^2 (h_3 - h_1)^2 \\ &\quad = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)^2 (\lambda_3 - \lambda_1)^2 = 4(S^3 - 27T^2).\end{aligned}$$

Donc T^2 est un invariant du douzième ordre, et T est un invariant de l'ordre 6.

6. Il s'ensuit aussi que le rapport $\frac{S^3}{T^2}$ est un invariant absolu de la forme biquadratique. La méthode ci-dessus

permet de montrer aisément comment ce rapport intervient dans la formation de l'équation aux rapports anharmoniques des racines de l'équation $f(x, 1) = 0$. En effet, si l'on désigne ces racines, comme nous l'avons déjà fait, par x_1, x_2, x_3, x_4, l'un des rapports anharmoniques qu'elles déterminent est égal à

$$\frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}$$

ou bien à

$$\frac{x_3 x_4 + x_1 x_2 - x_1 x_4 - x_2 x_3}{x_3 x_4 + x_1 x_2 - x_2 x_4 - x_1 x_3},$$

et, par conséquent, chacun des six rapports anharmoniques considérés est égal à la valeur que prend l'expression

$$\frac{\lambda_i - \lambda_h}{\lambda_i - \lambda_k}$$

lorsque i, h, k désignent une quelconque des permutations des indices 1, 2, 3. Soit donc ρ un tel rapport anharmonique, et soit

$$\rho = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3}.$$

On en conclut

$$\rho + \frac{1}{\rho} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}.$$

Soit encore

$$\lambda^3 - S\lambda + 2T = \varphi(\lambda),$$

l'égalité précédente donnera

$$\rho + \frac{1}{\rho} = \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 3\lambda_1^2}{\varphi'(\lambda_1)}$$
$$= \frac{2S + 3\lambda_1^2}{3\lambda_1^2 - S}.$$

On en conclut

$$\lambda_1^2 = \frac{S(\rho + 1)^2}{3(\rho^2 - \rho + 1)}.$$

D'ailleurs, on déduit de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$,

$$\lambda_1^2(\lambda_1^2 - S)^2 - 4T^2 = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{S^3(\rho+1)^2[-2\rho^2+5\rho-2]^2}{27(\rho^2-\rho+1)^2} - 4T^2 = 0,$$

ou encore

$$S^3(\rho+1)^2(2\rho-1)^2(\rho-2)^2 - 108T^2(\rho^2-\rho+1)^2 = 0.$$

Telle est l'équation cherchée; elle montre que le rapport $\frac{S^3}{T^2}$ est la valeur que prend la fraction

$$\frac{108(\rho^2-\rho+1)^2}{(\rho+1)^2(2\rho-1)^2(\rho+2)^2}$$

quand on y remplace ρ par l'un quelconque des six rapports anharmoniques des racines de l'équation

$$f(x, 1) = 0.$$

7. Nous terminerons ce travail en indiquant un procédé de calcul très simple pour ramener une forme quadrique binaire à la forme canonique

$$Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4.$$

Soit encore

$$f = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

la forme donnée. Faisons la substitution

$$x = \alpha x' + \beta y',$$
$$y = x' + y',$$

et, dans l'expression de la forme transformée, calculons les coefficients de x'^3y' et $x'y'^3$. Ces coefficients sont égaux à

$$4[a\alpha^3\beta + b(\alpha^3 + 3\alpha^2\beta) + 3c(\alpha^2 + \alpha\beta) + d(\alpha + 3\beta) + e]$$

et à

$$4[a\alpha\beta^3 + b(\beta^3 + 3\alpha\beta^2) + 3c(\beta^2 + \alpha\beta) + d(\beta + 3\alpha) + e].$$

En égalant ces coefficients à zéro, on trouve deux équations qui, retranchées membre à membre, donnent lieu à l'équation suivante :

$$(5)\quad a\alpha\beta(\alpha+\beta) + b[(\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta] + 3c(\alpha+\beta) + 2d = 0.$$

En les ajoutant membre à membre, on trouve

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} a\alpha\beta[(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta] + b(\alpha+\beta)^3 \\ \quad + 3c(\alpha+\beta)^2 + 4d(\alpha+\beta) + 2e = 0. \end{array}\right.$$

Puis, en multipliant les deux membres de (5) par $\alpha + \beta$, et retranchant (5) et (6) membre à membre, on trouve encore

$$(7)\qquad a\alpha^2\beta^2 + b\alpha\beta(\alpha+\beta) - d(\alpha+\beta) - e = 0.$$

Soit

$$(8)\qquad a\alpha\beta + b(\alpha+\beta) = \lambda.$$

Les équations (5) et (7) se transforment comme il suit :

$$(9)\qquad (\lambda + 3c)(\alpha+\beta) + 2b\alpha\beta + 2d = 0,$$

$$(10)\qquad d(\alpha+\beta) - \lambda\alpha\beta + e = 0.$$

Éliminant $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ entre (8), (9) et (10), on trouve, pour déterminer λ, l'équation suivante :

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} a & b & -\lambda \\ 2b & \lambda + 3c & 2d \\ -\lambda & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on ramène à une forme plus symétrique par la substitution

$$\lambda = -c + 2\mu.$$

En effet, on trouve ainsi

$$\begin{vmatrix} a & b & c-2\mu \\ b & c+\mu & d \\ c-2\mu & d & e \end{vmatrix} = 0,$$

et cette équation se ramène à la forme

$$\lambda'^3 - S\lambda' + 2T = 0$$

par la substitution $\mu = -\frac{\lambda'}{2}$.

8. Mais, en faisant la substitution $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = x' + y'$, nous supposons essentiellement que son déterminant $\alpha - \beta$ n'est pas nul. Si la résolution du système des équations (9), (10) et (11) donnait $\alpha = \beta$, la constante α qui figure dans cette dernière égalité devrait vérifier les équations (5) et (6), et l'on aurait $f(\alpha, 1) = 0$, $f'(\alpha, 1) = 0$. L'équation $f = 0$ aurait alors au moins une racine multiple, et la réduction de la forme f, réduction possible chaque fois que l'équation n'a pas de racine triple, n'offrirait qu'un intérêt secondaire; c'est pourquoi nous nous abstiendrons de développer la discussion dans ces cas particuliers.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1900).

Mathématiques élémentaires.

O et O′ étant les points d'intersection des côtés opposés d'un quadrilatère Q, on considère le quadrilatère Q′ formé par les bissectrices des angles du quadrilatère Q, de telle sorte que deux côtés opposés de Q′ soient les bissectrices de deux angles opposés de Q.

1° Soit I le point d'intersection des diagonales du quadrilatère Q'; quel est le lieu géométrique du point I lorsque le quadrilatère Q se déforme de façon que, O et O' restant fixes, deux sommets opposés de ce quadrilatère décrivent, respectivement, deux cercles fixes passant chacun par les deux points O et O'?

2° Les trois points O, O' et I restant fixes, et l'un des sommets du quadrilatère Q décrivant une droite Δ, quels sont les lieux géométriques décrits par les trois autres sommets de ce quadrilatère?

Discuter la nature de chacun de ces lieux suivant la position de la droite Δ dans le plan.

3° Calculer les angles et les côtés du quadrilatère Q', connaissant les angles et les côtés du quadrilatère Q.

Montrer que, si l'on désigne par A, B, C, D les angles du quadrilatère Q, et par a', b', c', d' les longueurs des côtés de Q' qui sont, respectivement, les bissectrices de ces angles, on a la relation

$$a' \sin \frac{A}{2} + c' \sin \frac{C}{2} = b' \sin \frac{B}{2} + d' \sin \frac{D}{2}.$$

Mathématiques spéciales.

Étant donnés trois axes Ox, Oy, Oz, on considère un cône du second ordre C tangent aux deux plans xOy et xOz, respectivement, suivant Oy et Oz, et une droite D rencontrant Ox.

1° Pour quelles positions de la droite D existe-t-il au moins une surface du second ordre S, indécomposable, passant par cette droite et tangente au cône C en tous les points d'une courbe plane?

2° La droite D étant située dans le plan xOy et restant fixe, trouver le lieu géométrique des centres des surfaces S.

Ce lieu est un plan P.

3° La droite D se déplaçant dans le plan xOy de façon que le plan P passe par un point donné A de l'espace, trouver l'enveloppe du plan P, et montrer que la droite D enveloppe une parabole Q.

4° Quel est le lieu géométrique des positions du point A pour lesquelles la parabole Q correspondante est égale à une parabole donnée?

5° La droite D étant toujours située dans le plan xOy et restant fixe, on donne un plan quelconque H. Montrer que le lieu géométrique des points de contact avec le plan H des surfaces S qui sont tangentes est une droite Δ.

Étudier la distribution des droites Δ dans l'espace quand H se déplace arbitrairement.

Combien y a-t-il de droites Δ passant par un point quelconque de l'espace?

Quelle est l'enveloppe du plan H lorsque la droite Δ se déplace dans un plan passant par D?

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On donne deux sphères fixes S et Σ, la première de centre O et de rayon r, la deuxième de centre ω et de rayon ρ. Soit M un point de la sphère S : on désigne par θ l'angle ωOM, par φ l'angle du plan ωOM avec un plan fixe mené par $O\omega$, et par a la distance des centres $O\omega$.

1° Former la relation différentielle entre θ et φ qui exprime que le point M décrit une courbe C dont les tangentes touchent la sphère Σ.

2° Exprimer, dans ce cas, θ et φ ou leurs lignes trigonométriques en fonction d'un paramètre, en introduisant seulement les transcendantes qu'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques.

3° Discuter, dans les différents cas qui peuvent se présenter, la forme des courbes C et celle de leurs projections sur un plan perpendiculaire à $O\omega$.

4° Quand le point M décrit la courbe C, le point μ où la tangente en M à C touche la sphère Σ décrit une courbe Γ : rectifier la courbe C et établir qu'elle est une développée de Γ : déterminer le plan osculateur, le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe C en chacun de ses points.

5° Rectifier la courbe Γ.

Mécanique rationnelle.

Trouver le mouvement d'une poulie circulaire homogène pesante de masse M, de rayon R et d'épaisseur négligeable.

posée sur un axe rigide fixe Ox, sur lequel elle est assujettie à rouler sans glisser, de telle façon que son plan passe constamment par l'axe.

En prenant comme sens positif sur Ox le sens descendant et appelant α l'angle de Ox avec l'horizon, on adjoindra à Ox un axe horizontal fixe Oy et un axe Oz dirigé vers le haut perpendiculairement au plan xOy.

On appellera x l'abscisse OH du point de contact H de la poulie avec l'axe Ox, θ l'angle du plan de la poulie avec le plan vertical xOz. On supposera qu'à l'instant initial, $t = 0$, la poulie est placée sans vitesse dans le plan vertical xOz, au-dessus de Ox, le point de contact en O ($\theta = 0$, $x = 0$), et que l'on applique au centre de la poulie une percussion donnée ayant pour projections respectives Ma, Mb, Mc sur les axes Ox, Oy, Oz.

On calculera les réactions de l'axe sur la poulie, et l'on déterminera l'instant où la poulie se détache de l'axe Ox.

Nota. — On suppose qu'il n'existe aucune résistance au roulement de la poulie sur l'axe.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (CONCOURS DE 1900).

Mathématiques.

Dans un plan, rapporté à des axes de coordonnées rectangulaires, on donne la cubique dont l'équation est

$$(x^2 + y^2)x = a^3.$$

Montrer que par les quatre points d'intersection (à distance finie) de cette cubique et d'un cercle on peut faire passer une conique. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette conique soit bitangente au cercle.

Montrer que les cercles bitangents à la cubique se distribuent en quatre familles distinctes (deux réelles et deux imaginaires) et que les cordes de contact sont, soit parallèles à une asymptote, soit concourantes en un des trois points de la courbe situés sur l'axe des x.

Étudier le lieu des centres et le lieu des milieux des cordes

de contact des cercles qui touchent la cubique en deux points réels.

Montrer que les points de contact avec la cubique de deux cercles bitangents de la même famille sont sur un même cercle.

Par un point arbitraire M_0 de la cubique passent deux cercles bitangents réels qui touchent respectivement la cubique en deux autres points M_1, M_2; calculer, en fonction des coordonnées x_0, y_0 du point M_0, les coordonnées des points (autres que les points de contact) où les tangentes en M_1, M_2 rencontrent la cubique; en conclure que ces tangentes concourent en un point de la courbe. Comment le calcul doit-il être modifié pour les cercles imaginaires bitangents qui passent par le point M_0?

N. B. — Il est inutile de reproduire l'énoncé.

QUESTIONS.

1855. l étant une longueur quelconque donnée, on prend, sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle, $BA' = CB' = AC' = l$, puis les points A″, B″, C″, isotomiques de A′, B′, C′, et l'on joint de toutes les manières possibles les neufs points

$$(A, \ldots, A', \ldots, A'', \ldots).$$

Étudier la figure formée. Montrer qu'elle comporte deux groupes de trois triangles triplement homologiques *de première espèce* (c'est-à-dire ayant deux à deux même *centre* d'homologie), deux groupes de trois triangles triplement homologiques *de deuxième espèce* (c'est-à-dire ayant deux à deux même *axe* d'homologie), un groupe de quatre triangles quadruplement homologiques *de deuxième espèce*, et beaucoup d'autres propriétés. Déterminer, quand l varie, les lieux de points et enveloppes de droites résultant de la figure.

(L. Ripert.)

1856. Lieu des centres des coniques dont on connaît le centre de courbure en un point donné, ainsi que la somme des carrés des axes. (E. Duporcq.)

1857. Étant données quatre divisions proportionnelles portées par quatre droites quelconques de l'espace, on considère les tétraèdres ayant pour sommets les points homologues de ces divisions. Si deux de ces tétraèdres sont semblables, tous les autres sont semblables deux à deux.

(E. Duporcq.)

1858. On considère la figure plane qui est la projection de la figure de l'espace formée par cinq plans a, b, c, d, e; on désigne par (a, b) la droite qui est la projection de l'intersection des plans a et b, et par (A, B) le point qui est la projection de l'intersection des plans autres que a et b. Montrer qu'il existe une conique telle que chacune des dix droites de la figure est la polaire du point correspondant.

(G. Fontené.)

1859. Étant donnés, dans un plan, un cercle C^2 ayant le centre O et un cercle-point non situé sur C^2, prenons sur le rayon qui unit O avec le point variable P de C^2, le conjugué harmonique de P par rapport au cercle-point; le lieu de P′ est une courbe de Jerabek; construire la tangente en le point P′, les tangentes en le point double, les tangentes doubles, l'intersection de la courbe avec une droite.

(V. Retali.)

1860. Par l'inversion quadrique définie avec le pôle O et le cercle-point V (conique des points unis), un cercle ayant le centre V, et qui ne passe par O, est transformé en une quartique rationnelle circulaire à point tacnodal, qui est ligne d'ombre d'un hélicoïde gauche. Construire les intersections de la courbe avec une droite; les tangentes en le point double (qui est aussi un foyer quadruple de la courbe), la tangente en un point quelconque, et les deux tangentes doubles.

(V. Retali.)

1861. On considère une ellipse E et un cercle C concentrique à E. Si cette ellipse, entraînant avec elle le cercle C, se déplace de façon à être constamment tangente à une droite fixe en un point donné, les courbes engendrées par les divers points du cercle C ont toutes même aire.

(E.-N. Barisien.)

[O2b]

PROBLÈMES SUR LES NORMALES AUX COURBES PLANES. COURBES DANS LESQUELLES LA SOMME N + N′ EST CONSTANTE;

PAR M. ÉDOUARD COLLIGNON.

En un point M d'une courbe AB on mène la normale MN, qui coupe en N l'axe Ox, et en N′ l'axe Oy, perpendiculaire à Ox. Nous appellerons N et N′ les longueurs MN, MN′, que l'on peut regarder comme les deux normales finies de la courbe rapportée aux axes rectangulaires Ox, Oy.

On propose de déterminer la courbe AB de telle sorte qu'il y ait une relation donnée entre les deux normales N et N′,

$$\varphi(N, N') = 0.$$

Soit α l'angle que fait la tangente MR à la courbe avec l'axe Ox; α sera aussi l'angle MN′O que fait la normale avec l'axe Oy pris dans le sens YO; et si x et y représentent les coordonnées OP = MP′, MP du point M, on aura

$$N = \frac{y}{\cos\alpha}, \qquad N' = \frac{x}{\sin\alpha}.$$

Soit $p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\alpha$. On en déduit

$$\sin\alpha = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}},$$

et l'équation différentielle de la courbe sera

$$\varphi\left(y\sqrt{1+p^2},\ x\frac{\sqrt{1+p^2}}{p}\right) = 0;$$

p tient la place de $\frac{dy}{dx}$. L'intégration de cette équation ne pourra se faire que lorsque la fonction φ sera déterminée. Nous examinerons ici le cas où elle se réduit à la somme ou à la différence des deux quantités N et N′, ce qui revient à poser

$$N \pm N' = \text{const.}$$

Soit donc $N + N' = a$, en appelant a la somme algébrique des deux quantités N et N′.

La droite NN′, formée de deux normales placées bout à bout, sera une droite de longueur constante a, dont les extrémités glissent respectivement sur les axes Ox et Oy. Les courbes cherchées sont les trajectoires orthogonales de ces droites, c'est-à-dire les développantes de la courbe que la droite mobile enveloppe dans son mouvement.

On obtient facilement l'équation de ces courbes en employant les *coordonnées podaires*. De l'origine O abaissons OR perpendiculaire sur la tangente MR à la courbe cherchée, normale à NN′. Nous poserons $OR = r$, et angle $yOR = \alpha$.

Pour obtenir toutes les positions de la droite NN′ dans l'angle yOx il suffit de faire varier α de o à $\frac{\pi}{2}$. A la valeur $\alpha = 0$ correspond la position de la droite mobile relevée le long de l'axe Oy; à $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la position de la droite couchée sur l'axe Ox.

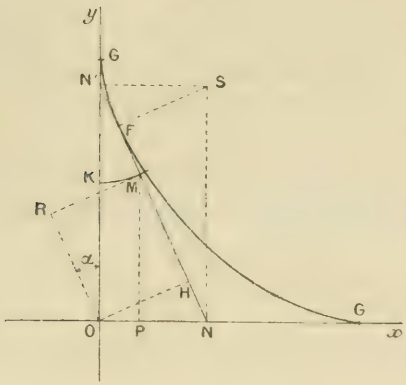
Dans ce système de coordonnées la longueur RM de la tangente comprise entre le pied de la perpendiculaire OR et le point de contact M est égale en valeur absolue à la dérivée $\frac{dr}{d\alpha}$. L'inspection de la figure montre que, lorsqu'on fait varier α de o à $\frac{\pi}{2}$, r diminue, de

sorte que $\frac{dr}{d\alpha}$ est négatif. On doit donc poser

$$\mathrm{RM} = -\frac{dr}{d\alpha}.$$

L'angle α se retrouve d'ailleurs en O N′N et en HON,

Fig. 1.



si l'on mène OH parallèle à RM par l'origine. On a donc

$$\mathrm{RM} = \mathrm{OH} = \mathrm{ON}\cos\alpha = a\sin\alpha\cos\alpha,$$

et l'équation podaire différentielle de la courbe est

$$\frac{dr}{d\alpha} = -a\sin\alpha\cos\alpha.$$

Il vient en intégrant, et en appelant C une constante arbitraire,

$$r = \mathrm{C} - \tfrac{1}{2}a\sin^2\alpha.$$

Si dans cette équation on fait $\alpha = 0$, ce qui suppose la droite mobile relevée en OG le long de Oy, on a $r = \mathrm{C}$. La constante C est donc l'ordonnée du point K qui forme sur l'axe Oy le point de départ de la courbe. On a, en

effet, pour ce point $r = C$, $\alpha = 0$, $\frac{dr}{d\alpha} = 0$; la courbe est normale en K à l'axe Oy.

La constante C peut recevoir, d'ailleurs, toutes les valeurs positives ou négatives. Mais nous nous occuperons principalement ici des valeurs de C qui correspondent à l'addition effective des deux segments NM, MN′ pour former la somme a. Il en sera ainsi si le point K tombe entre l'origine O et le point G, extrémité de la droite NN′ relevée sur Oy; il faut et il suffit, par conséquent, que la constante C soit positive et moindre que a.

On aura, en projetant le contour ORM sur les axes, les coordonnées x et y rapportées aux axes rectangulaires Ox, Oy. Il vient

$$x = OP = a \sin\alpha \cos^2\alpha - r \sin\alpha = (a - C) \sin\alpha - \tfrac{1}{2} a \sin^3\alpha,$$

$$y = PM = a \sin^2\alpha \cos\alpha + r \cos\alpha = \left(\frac{a}{2} + C\right) \cos\alpha - \tfrac{1}{2} a \cos^3\alpha.$$

L'élimination de l'angle α entre ces deux équations conduirait à l'équation cartésienne de la courbe.

Sans former cette équation, nous pouvons voir entre quelles limites la courbe reste comprise.

1° Considérons d'abord le rayon vecteur r.

La dérivée $\frac{dr}{d\alpha}$ s'annule pour $\sin\alpha = 0$ et pour $\cos\alpha = 0$, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$ et pour $a = \frac{\pi}{2}$; r varie entre les limites C et $C - \frac{1}{2} a$; elles sont toutes deux positives, si C est positif et supérieur à $\frac{a}{2}$. Lorsque, au contraire, C, supposé compris entre 0 et a, est moindre que $\frac{1}{2} a$, r change de signe, et prend la valeur 0 lorsqu'on a

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2C}{a}}.$$

2° Les limites de x correspondent de même à $\frac{dx}{d\alpha} = 0$, c'est-à-dire à la valeur de α fournie par l'équation

$$(a - C)\cos\alpha - \tfrac{3}{2}a\sin^2\alpha\cos\alpha = 0,$$

ce qui entraîne les relations

$$\cos\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sin\alpha = \sqrt{\frac{2(a - C)}{3a}}$$

La première donne

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad x = \tfrac{1}{2}a - C, \qquad y = 0.$$

La seconde fournit une valeur réelle de l'angle α, si C est positif et moindre que a. Nous verrons tout à l'heure que cette valeur de l'angle α correspond au point de rebroussement de la courbe. On a alors

$$x = (a - C)\sqrt{\frac{2(a - C)}{3a}} - \tfrac{1}{2}a\,\frac{2(a - C)}{3a}\sqrt{\frac{2(a - C)}{3a}}$$

$$= \tfrac{2}{3}(a - C)\sqrt{\frac{2(a - C)}{3a}},$$

$$r = C - \tfrac{1}{2}a\,\frac{2(a - C)}{3a} = \frac{4C - a}{3},$$

$$y = \sqrt{\frac{(a + 2C)^3}{27a}}.$$

L'abscisse x devient nulle pour $\alpha = 0$, $y = C$, $r = C$, et elle devient nulle aussi lorsqu'on a

$$\sin^2\alpha = \frac{2(a - C)}{a},$$

relation qui définit une valeur réelle de l'angle α lorsque C est $> \frac{a}{2}$ et $< a$. La valeur correspondante de y est égale à $\frac{1}{2}\sqrt{a(2C - a)}$. Ce sont les coordonnées du point double de la courbe sur l'axe Oy.

3° Les limites de y sont fournies par l'équation

$$\frac{dy}{d\alpha} = -\left(\frac{a}{2} + C\right)\sin\alpha + \frac{3}{2}a\cos^2\alpha\sin\alpha = 0,$$

c'est-à-dire par

$$\sin\alpha = 0, \qquad \alpha = 0, \qquad x = 0, \qquad y = C;$$

et par la valeur de $\cos\alpha$ fournie par l'équation

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{a + 2C}{3a}}.$$

Pour que l'angle α soit réel, il faut et il suffit que l'on ait

$$a + 2C < 3a \qquad \text{ou} \qquad C < a,$$

condition que nous supposons remplie. On en déduit pour le point correspondant

$$x = \frac{\left[\frac{2}{3}(a - C)\right]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}},$$

$$y = \frac{(a + 2C)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3a}}.$$

Cherchons les points pour lesquels $y = 0$. Ils seront donnés par les équations

$$\cos\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{a}{2} + C\right) = \frac{1}{2}a\cos^2\alpha.$$

ou bien

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{a + 2C}{a}}.$$

Si l'on prend C entre 0 et a, cette dernière équation ne définit qu'un angle imaginaire. Il faudrait, pour trouver un angle réel, qu'on eût C négatif et inférieur à $-\frac{a}{2}$.

Le rayon de courbure ρ en un point M quelconque est

donné, en coordonnées podaires, par l'équation

$$\rho = r + \frac{d^2 r}{d\alpha^2}.$$

Si on l'applique à l'équation de la courbe,

$$r = C - \tfrac{1}{2} a \sin^2 \alpha,$$

il vient d'abord

$$\frac{d^2 r}{d\alpha^2} = - a \cos 2\alpha,$$

puis

$$\begin{aligned} \rho &= C - \tfrac{1}{2} a \sin^2 \alpha - a \cos 2\alpha \\ &= C - a + \tfrac{3}{2} a \sin^2 \alpha \\ &= - [(a - C) - \tfrac{3}{2} a \sin^2 \alpha]. \end{aligned}$$

L'analyse attribue ici un certain signe au rayon de courbure et c'est le signe —, lorsque la somme $C + \frac{3}{2} a \sin^2 \alpha$ est inférieure à a.

Si l'on adopte ce signe et qu'on prenne aussi r avec le signe que lui assigne l'équation $r = C - \frac{1}{2} a \sin^2 \alpha$, on obtient l'équation suivante

$$\rho + 3r = 4C - a,$$

de sorte que la somme algébrique du rayon de courbure et du triple du rayon podaire est constante tout le long de la courbe.

La valeur absolue du rayon de courbure au point M est donnée sur la figure. Achevons le rectangle ONSN'. Le point S, sommet de ce rectangle, est le centre instantané de la droite NN' quand ses extrémités glissent simultanément sur les deux axes ; et si l'on abaisse de ce point la perpendiculaire SF sur la droite, on aura en F le point où la droite mobile touche son enveloppe. La longueur FM, comprise entre le point de contact F et la développante MR de l'enveloppe, est le rayon de courbure de la développante, ou de la courbe cherchée. Or on a

$$FM = FH - HM = FH - OR = a - C - \tfrac{3}{2} a \sin^2 \alpha.$$

Le rayon de courbure ρ change de signe en passant par zéro lorsqu'on a

$$\tfrac{3}{2} a \sin^2 \alpha = a - C$$

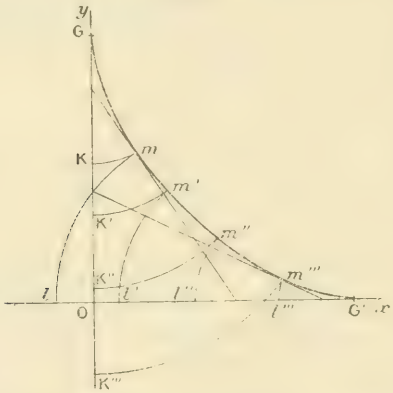
ou

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{2(a - C)}{3a}}.$$

Soit α_0 cet angle particulier, qui correspond au cas où les points F et M coïncident. Si l'on n'attribue à C que des valeurs comprises entre o et a, la valeur de α_0 sera toujours réelle. Elle correspond aux points de rebroussement de la courbe.

Il résulte de là que, si l'on détermine les coordonnées de la courbe qui correspondent à $\alpha = \alpha_0$, on aura en même temps les coordonnées de l'enveloppe GG′ et l'éli-

Fig. 2.



mination de C entre les deux équations qui les font connaître conduira à l'équation de l'enveloppe elle-même.

En coordonnées podaires, la courbe-enveloppe GG′ de la droite NN′ a pour équation

$$r' = a \sin \alpha \cos \alpha,$$

r' étant le rayon vecteur OH et α l'angle HOX.

Les courbes cherchées affectent les formes Kml, $K'm'l'$, ..., $K'''m'''l'''$. Deux d'entre elles passent par l'origine; l'une de ses courbes correspond à $C = \frac{1}{2}a$, ce qui donne, avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

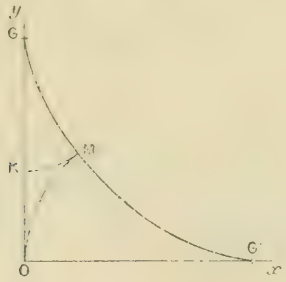
$$r = C - \tfrac{1}{2}a = 0,$$

$$\frac{dr}{d\alpha} = 0,$$

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

Cette courbe touche en O l'axe Oy.

Fig. 3.



L'autre courbe correspond à $C = 0$ avec $\alpha = 0$, ce qui donne à la fois

$$r = 0, \qquad \frac{dr}{d\alpha} = 0, \qquad x = 0, \qquad y = 0.$$

Elle touche en O l'axe Ox.

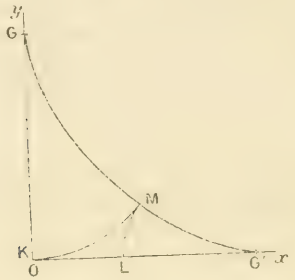
Pour obtenir la valeur de l'arc de la courbe, il faudrait intégrer la fonction $\rho\, d\alpha$, en ayant soin de prendre ρ en valeur absolue.

Les courbes obtenues sont symétriques, non seulement par rapport aux axes Ox, Oy, mais encore par rapport à leurs bissectrices. Si l'on donne à C des valeurs réelles quelconques en dehors des limites 0 et a

où nous l'avons considérée, on obtient d'autres courbes qui sont représentées par les mêmes équations; elles ne rencontrent plus la courbe-enveloppe, et pour elles c'est la différence, et non la somme des normales, qui reste constante.

Pour une très grande valeur de C, la courbe cherchée

Fig. 4.



se rapproche indéfiniment d'une circonférence décrite du point O comme centre avec C pour rayon. Les équations qui font connaître x et y se réduisent, en effet, à la forme approximative

$$x = -C \sin \alpha,$$
$$y = C \cos \alpha,$$

ce qui conduit à l'équation du cercle $x^2 + y^2 = C^2$.

L'hypothèse revient, en effet, à réduire la longueur a à une valeur infiniment petite; les normales de la courbe cherchée passent alors sensiblement par le point fixe O, et elles sont sensiblement égales, puisque leur différence est constante et égale à a, quantité supposée négligeable. On retrouve donc le cercle comme limite des courbes pour a infiniment petit, ou C infiniment grand.

[F4]

SUR L'INTÉGRALE D'EULER ET L'ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE;

PAR M. E. IAGGI.

Il s'agit, dans cette Note, de l'intégration de l'équation

$$\frac{dx}{\Delta x} + \frac{dy}{\Delta y} = 0, \tag{1}$$

où

$$\Delta x = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}, \qquad \Delta y = \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}.$$

Depuis qu'Euler en a donné, sans démonstration, l'intégrale générale, il en a été fait de nombreuses démonstrations; on connaît notamment celle de Clebsch [1], où entrent des considérations géométriques, et la démonstration plus analytique de M. Darboux [2]. La méthode analytique suivante emploie des calculs analogues à ceux de la méthode de M. Darboux, mais procède d'un raisonnement plus direct et plus intuitif, par conséquent préférable au point de vue de l'enseignement.

L'équation (1) s'écrit

$$\Delta y\, dx + \Delta x\, dy = 0. \tag{2}$$

Le premier membre de cette équation est l'ensemble de deux termes de la différentielle de la fonction

$$x\,\Delta y + y\,\Delta x.$$

---

(1) CLEBSCH, *Traité de Géométrie*.

(2) DARBOUX, *Sur une classe de courbes du quatrième ordre et l'addition des fonctions elliptiques* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1re série, t. IV; 1867).

et l'on a donc, en tenant compte de l'équation (2),

$$(3) \qquad d(x\,\Delta y + y\,\Delta x) = x\,d\Delta y + y\,d\Delta x.$$

Or, on peut calculer cette expression; on a

$$(4) \qquad \begin{cases} \Delta x^2 = 1 - (1 + k^2)x^2 + k^2x^2, \\ \Delta y^2 = 1 - (1 - k^2)y^2 - k^2y^4, \end{cases}$$

et par conséquent

$$d\Delta x = \frac{-(1 + k^2) + 2k^2x^2}{\Delta x}\,x\,dx.$$

$$d\Delta y = \frac{-(1 - k^2) + 2k^2y^2}{\Delta y}\,y\,dy.$$

d'où

$$\begin{aligned} d(x\,\Delta y + y\,\Delta x) &= x\,d\Delta y + y\,d\Delta x \\ &= -(1 + k^2)xy\left(\frac{dx}{\Delta x} - \frac{dy}{\Delta y}\right) \\ &\quad + 2k^2xy\left(\frac{x^2\,dx}{\Delta x} - \frac{y^2\,dy}{\Delta y}\right), \end{aligned}$$

et, en tenant compte de l'équation (1),

$$(5) \qquad d(x\,\Delta y + y\,\Delta y) = 2k^2xy\left(\frac{x^2\,dx}{\Delta x} - \frac{y^2\,dy}{\Delta y}\right).$$

Le second membre de cette équation différentielle n'est pas sous forme intégrable; on ne pourrait l'y mettre qu'avec l'aide de la relation entre x et y que justement nous cherchons; mais observons que l'on peut obtenir une expression de la fonction dont le premier membre est la différentielle : les formules (4) donnent en effet

$$x^2\,\Delta y^2 - y^2\,\Delta x^2 = (x^2 - y^2)(1 - k^2x^2y^2),$$

d'où

$$(6) \qquad x\,\Delta y + y\,\Delta x = \frac{(x^2 - y^2)(1 - k^2x^2y^2)}{x\,\Delta y - y\,\Delta x}.$$

En divisant membre à membre (5) et (6), on a alors

$$\frac{d(x\,\Delta y + y\,\Delta x)}{x\,\Delta y + y\,\Delta x} = \frac{2k^2xy\left(\dfrac{x^2\,dx}{\Delta x} - \dfrac{y^2\,dy}{\Delta y}\right)(x\,\Delta y - y\,\Delta x)}{(x^2 - y^2)(1 - k^2x^2y^2)}.$$

En effectuant le produit des deux derniers facteurs du numérateur de cette expression, on voit que ce produit se met, grâce à l'équation (1), sous la forme

$$(y^2 - x^2)(x\,dy + y\,dx),$$

et l'on a

$$\frac{d(x\,\Delta y + y\,\Delta x)}{x\,\Delta y + y\,\Delta x} = \frac{-2k^2 xy(x\,dy + y\,dx)}{1 - k^2 x^2 y^2}.$$

Les deux membres sont maintenant, d'une manière explicite, sous forme de différentielle exacte, et l'on obtient sans difficulté l'intégrale générale avec une constante arbitraire c

$$(7) \qquad \frac{x\,\Delta y + y\,\Delta x}{1 - k^2 x^2 y^2} = c.$$

De là on tire, comme on sait, la formule d'addition de $\operatorname{sn} z$.

Si l'on considère les deux fonctions

$$u = \operatorname{sn} x = \frac{\Pi(x)}{\sqrt{k}\,\Theta(x)}, \qquad v = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} = \operatorname{sn}(K + x) = \frac{\Pi_1(x)}{\sqrt{k}\,\Theta_1(x)},$$

qui sont déterminées par l'inversion des intégrales [1]

$$(8) \qquad x = \int_0^u \frac{du}{\Delta u}, \qquad x = \int_1^v \frac{dv}{-\Delta v},$$

on voit que

$$dx = \frac{du}{\Delta u} = -\frac{dv}{\Delta v}.$$

La relation différentielle

$$\frac{du}{\Delta u} + \frac{dv}{\Delta v} = 0$$

permet de trouver directement la relation en termes

---

[1] *Sur les fonctions elliptiques de première espèce* (*Nouvelles Annales*, 1898).

finis qui lie u et v. L'intégrale générale de l'équation précédente est en effet, d'après ce qui précède,

$$\frac{u\,\Delta v + v\,\Delta u}{1 - k^2 u^2 v^2} = c;$$

or, en supposant $x = 0$, on a

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = 1.$$

Il s'ensuit

$$c = 1$$

et par conséquent

$$(9) \qquad u\,\Delta v + v\,\Delta u = 1 - k^2 u^2 v^2.$$

Telle est la relation qui lie $u(x)$ et $v(x)$. Mais on peut l'avoir sous forme rationnelle d'une manière plus simple qu'en rendant rationnelle la précédente : l'équation (6) s'écrit maintenant

$$u^2\,\Delta v^2 - v^2\,\Delta u^2 = (u^2 - v^2)(1 - k^2 u^2 v^2)$$

et par conséquent, en tenant compte de (9),

$$(10) \qquad u\,\Delta v - v\,\Delta u = u^2 - v^2,$$

(9) et (10) donnent alors

$$2u\,\Delta v = u^2 - v^2 + 1 - k^2 u^2 v^2,$$
$$2v\,\Delta u = v^2 - u^2 + 1 - k^2 u^2 v^2$$

ou

$$1 - v^2 - 2u\sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - k^2 v^2} + u^2(1 - k^2 v^2) = 0,$$
$$1 - u^2 - 2v\sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - k^2 u^2} + v^2(1 - k^2 u^2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\sqrt{1 - v^2} - u\sqrt{1 - k^2 v^2}\right)^2 = 0,$$
$$\left(\sqrt{1 - u^2} - v\sqrt{1 - k^2 u^2}\right)^2 = 0,$$

d'où les deux formules

$$(11) \qquad u = \sqrt{\frac{1 - v^2}{1 - k^2 v^2}}, \qquad v = \sqrt{\frac{1 - u^2}{1 - k^2 u^2}},$$

qui se résument dans la relation

$$u^2 + v^2 = 1 + k^2 u^2 v^2. \tag{12}$$

Dans les deux formules précédentes, il n'y a aucune ambiguïté sur les lignes des radicaux. La manière dont nous les avons trouvées montre que u et v sont de mêmes signes que Δv et Δu, tant qu'il s'agit de variables réelles ($u^2, v^2 < 1$).

Les calculs précédents donnent d'ailleurs sans ambiguïté de signes

$$2vu'_x = 2v\,\Delta u = 1 - u^2 + v^2(1 - k^2 u^2) = 2(1 - u^2),$$
$$-2uv'_x = 2u\,\Delta v = 1 - v^2 + u^2(1 - k^2 v^2) = 2(1 - v^2),$$

d'où

$$u' = \frac{1 - u^2}{v}, \qquad v' = -\frac{1 - v^2}{u},$$

formules *identiques* à celles qu'on pourrait écrire pour les fonctions circulaires

$$u = \sin x,$$
$$v = \cos x.$$

Au moyen de la relation (12), ces formules se mettent encore sous d'autres formes rationnelles

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \frac{1 - u^2}{v} = v(1 - k^2 u^2) = \frac{k'^2 v}{1 - k^2 v^2}, \\ v' &= -\frac{1 - v^2}{u} = -u(1 - k^2 v^2) = -\frac{k'^2 u}{1 - k^2 u^2}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Les dernières expressions de u' et de v' montrent que, comme pour les fonctions circulaires, u' s'exprime rationnellement en v seule, v' s'exprime rationnellement en u seule.

Formons encore au moyen de l'intégrale d'Euler les expressions de $u(x + y)$ et de $v(x + y)$ que nous avons indiquées dans une Note précédente (*loc. cit.*).

Changeant x en $u(x)$, y en $u(y)$ dans la formule (7), cette formule donne, comme on sait,

$$(14) \qquad u(x+y) = \frac{u_x u'_y + u_y u'_x}{1 - k^2 u_x^2 u_y^2}.$$

Si dans cette formule on remplace u'_x et u'_y par les valeurs données par la formule

$$u' = v(1 - k^2 u^2),$$

puis par les valeurs données par la formule

$$u' = \frac{1 - u^2}{v},$$

on a

$$u(x+y) = \frac{u_x v_y + u_y v_x - k^2 u_x u_y (u_x v_x + u_y v_y)}{1 - k^2 u_x^2 u_y^2}$$

$$= \frac{u_x v_x + u_y v_y - u_x u_y (u_x v_y + u_y v_x)}{v_x v_y (1 - k^2 u_x^2 u_y^2)}.$$

Ces formules peuvent être simplifiées de deux manières :

1° En multipliant les deux termes de la deuxième formule par $k^2 u_x u_y$ et les ajoutant aux termes correspondants de la première;

2° En multipliant les deux termes de la première formule par $u_x u_y$ et les ajoutant aux termes correspondants de la deuxième.

Dans les deux cas, le facteur $(1 - k^2 u_x^2 u_y^2)$ disparaît, et l'on a les formules rationnelles

$$(15) \qquad u(x+y) = \frac{u_x v_y + u_y v_x}{1 + k^2 u_x v_x u_y v_y} = \frac{u_x v_x + u_y v_y}{u_x u_y + v_x v_y}.$$

On peut passer de ces formules à celles de $v(x+y)$, en changeant x en $x + K$. Mais l'intégrale d'Euler peut donner également ces formules. On a en effet

$$dx = \frac{dv_x}{-\Delta v_x}, \qquad dy = \frac{du_y}{\Delta u_y},$$

et en supposant $x+y$ constant

$$\frac{dv_x}{\Delta v_x} - \frac{du_y}{\Delta u_y} = 0.$$

Cette équation ne diffère de (1) que par le changement de x en v_x, y en $-u_y$. L'intégrale d'Euler (7) donne donc, par les mêmes changements,

$$\frac{v_x \Delta u_y - u_y \Delta v_x}{1 - k^2 v_x^2 u_y^2} = c.$$

Si l'on fait $y=0$, le premier membre se réduit à $v_x \cdot c$, qui est fonction de $x+y$ ou de $v(x+y)$, n'est donc autre que $v(x+y)$. Nous servant alors des formules

$$\Delta u_y = \quad u'_y = v_y(1 - k^2 u_y^2),$$
$$\Delta v_x = -v'_x = u_y(1 - k^2 v_y^2).$$

puis des formules

$$\Delta u_y = \quad u'_y = \frac{1 - u_y^2}{v_y},$$
$$\Delta v_x = -v'_x = \frac{1 - v_x^2}{u_x},$$

nous obtenons, en opérant comme précédemment, les formules rationnelles

$$(16) \qquad v(x+y) = \frac{v_x v_y - u_x u_y}{1 - k^2 u_x u_y v_x v_y} = \frac{u_x v_x - u_y v_y}{u_x v_y - v_x v_y}.$$

On peut remarquer l'analogie des formules (15) et (16) avec les formules relatives aux fonctions circulaires.

Les numérateurs des premières des formules (15) et (16) sont les formules d'addition

$$u(x+y) = u_x v_y + u_y v_x,$$
$$v(x+y) = v_x v_y - u_x u_y.$$

des fonctions circulaires

$$u_x = \sin x,$$
$$v_x = \cos x.$$

Quant aux secondes formules (15) et (16), elles sont *identiques* aux formules d'addition des fonctions circulaires que l'on peut écrire ainsi

$$\frac{u_x v_x + u_y v_y}{u_x u_y + v_x v_y} = \frac{\sin x \cos x + \sin y \cos y}{\sin x \sin y + \cos x \cos y}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 2y)}{\cos(x-y)} = \sin(x+y) = u(x+y),$$
$$\frac{u_x v_x - u_y v_y}{u_x v_y - v_x u_y} = \frac{\sin x \cos x - \sin y \cos y}{\sin x \cos y - \sin y \cos x}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 2y)}{\sin(x-y)} = \cos(x+y) = v(x+y).$$

Ceci est d'ailleurs une loi générale pour les formules relatives aux fonctions elliptiques n et v : *toute formule qui ne contient pas k explicitement, ou dont on a éliminé k soit au moyen de l'équation* (12), *soit de toute autre manière, est* IDENTIQUE *à la formule correspondante des fonctions circulaires.* En effet, les fonctions elliptiques u et v se réduisant, lorsque l'on fait $k = 0$, aux fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$, les formules relatives aux fonctions elliptiques u et v doivent donc se réduire, lorsqu'on annule k, aux formules relatives aux fonctions circulaires ; si donc ces formules ne contiennent pas explicitement k, elles sont identiques aux formules correspondantes des fonctions circulaires. Ceci montre combien serait méthodique et simple une théorie des fonctions elliptiques faite en prenant pour éléments les fonctions u et v.

[M¹3e] [M²2e]

SUR LA SYMÉTRIE DE DEUX FIGURES ALGÉBRIQUES PAR RAPPORT A UN POINT;

PAR M. S. MANGEOT,
Docteur ès Sciences.

La multiplication et la division sont les seules opérations d'Algèbre qu'il y ait à effectuer pour résoudre le problème de la recherche des centres dans les figures ou systèmes des deux figures algébriques définis analytiquement.

J'ai déjà traité ici (¹) une partie de ce problème, celle qui a pour objet la détermination des centres des courbes planes ou des surfaces. Je ne reviendrai pas sur cette question, renvoyant le lecteur à la solution que j'en ai donnée. Cette solution, que j'ai pu formuler par des règles, n'exige pas d'autres calculs d'Algèbre que des multiplications de polynomes entiers (²). Les autres cas du problème, qui font l'objet de la présente Note, se ramèneront à celui-ci et pourront être complètement résolus par des multiplications et des divisions algébriques (³).

La question à traiter est la suivante :

Étant données, par des équations cartésiennes en-

(¹) Mai 1898.

(²) Les produits à calculer ne sont même tous que des puissances de fonctions linéaires de trois variables au plus.

(³) Les éliminations sont évitées dans tous les cas. On n'a pas non plus d'équations à résoudre (sauf peut-être un système de trois équations du premier degré à trois inconnues).

tières, deux courbes planes, ou deux surfaces, ou deux courbes gauches qui peuvent être confondues, trouver s'il existe un point ω par rapport auquel les deux figures soient symétriques l'une de l'autre, et déterminer la position de ce point.

Les coordonnées courantes étant x, y, z, je désignerai celles du point ω par x_0, y_0, z_0 : les axes de coordonnées sont rectangulaires ou obliques.

Dans ce qui va suivre, j'emploierai deux notations dont je donne dès à présent la définition. Si une lettre affectée d'indice, telle que f_r, désigne un polynome entier en x, y, z, la notation f_{-r} représentera l'expression obtenue en remplaçant dans ce polynome x, y, z par $2x_0 - x$, $2y_0 - y$, $2z_0 - z$. Toute notation de la forme (P), si P est un symbole désignant un polynome entier en x, y, z, sera censée représenter la somme des termes de ce polynome dont le degré est le plus élevé.

Cas de deux courbes planes ou de deux surfaces.

Soient $f_1(x, y, z) = 0$, $\varphi_1(x, y, z) = 0$ deux équations entières entre x, y, z, de même degré m. Pour que les deux surfaces S, S' qu'elles représentent soient symétriques l'une de l'autre par rapport à un point $\omega(x_0, y_0, z_0)$, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$f_{-1} = a\varphi_1.$$

On déduit de là cette relation

$$f_{-1} \pm f_1 = a\varphi_1 \pm f_1;$$

et si l'on remarque que l'une des deux déterminations de son premier membre a un degré de parité contraire à

celle de m la forme que présente ce premier membre donne ce théorème :

Pour que les deux surfaces S, S′ *soient symétriques l'une de l'autre par rapport à un point* ω, *il est nécessaire, et il suffit aussi, que les termes du* $m^{\text{ième}}$ *degré de* f_1 *soient égaux à ceux du* $m^{\text{ième}}$ *degré de* φ_1 *à un facteur près* k; *que le polynome* $k\varphi_1 - f_1$ *ait son degré de parité contraire à celle de* m; *et que les deux surfaces représentées par les équations*

$$(1) \qquad k\varphi_1 + f_1 = 0, \qquad k\varphi_1 - f_1 = 0$$

aient un centre commun (x_0, y_0, z_0). *Ce point coïncide avec le point* ω [1].

La condition est suffisante, parce qu'en posant

$$k\varphi_1 + f_1 = 2u_1, \qquad k\varphi_1 - f_1 = 2v_1,$$

on a

$$f_{-1} = u_{-1} - v_{-1},$$

et, par suite, u_1 et v_1 ayant leurs degrés de parités différentes,

$$= f_{-1} = u_1 + v_1 = k\varphi_1.$$

Le théorème précédent s'applique à deux courbes planes du $m^{\text{ième}}$ ordre, C, C′, ayant pour équations entières $f_1(x, y) = 0$, $\varphi_1(x, y) = 0$, si l'on remplace dans son énoncé le mot *surfaces* par le mot *courbes;* ici, le point ω a pour coordonnées x_0, y_0.

En définitive, on voit que les points ω relatifs aux deux surfaces S, S′, ou aux deux courbes C, C′, ne sont pas autre chose que les centres communs que peuvent

---

[1] Les deux équations (1) sont, la première de degré m, la seconde de degré inférieur à m. On regarde une surface (ou une courbe plane) rejetée à l'infini ou indéterminée, comme ayant pour centre un point quelconque de l'espace (ou du plan de la courbe).

avoir les deux surfaces ou les deux courbes planes, représentées par les équations (1), dont les degrés doivent toutefois avoir des parités différentes.

Cas de deux courbes gauches définies par quatre équations de même degré.

Soient F l'intersection de deux surfaces ayant pour équations

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0,$$

et Φ l'intersection de deux surfaces représentées par les équations

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_2(x, y, z) = 0,$$

les quatre équations étant supposées entières et de même degré m.

Pour que les deux courbes F et Φ soient symétriques l'une de l'autre par rapport à un point $\omega(x_0, y_0, z_0)$, il faut et il suffit que les polynomes f_{-1}, f_{-2} soient des fonctions linéaires homogènes des polynomes φ_1, φ_2 telles que

$$(2) \qquad \begin{cases} f_{-1} = a\,\varphi_1 + b\,\varphi_2 \\ f_{-2} = a'\varphi_1 + b'\varphi_2 \end{cases} \qquad (ab' - ba' \neq 0) \quad [1].$$

Les identités (2) donnent

$$(3) \qquad \begin{cases} (-1)^m (f_1) = a\,(\varphi_1) + b\,(\varphi_2), \\ (-1)^m (f_2) = a'(\varphi_1) + b'(\varphi_2). \end{cases}$$

Il y a lieu de distinguer deux cas, que je vais examiner séparément :

1° *Les deux fonctions homogènes* (f_1), (f_2) *ne sont pas proportionnelles.* — Il devra en être de même des deux fonctions (φ_1), (φ_2), d'après les relations (3), et il

---

[1] Les équations $f_{-1} = 0$, $f_{-2} = 0$ sont celles de la courbe symétrique de F par rapport à ω.

ne pourra pas y avoir alors plus d'un système de valeurs des constantes a, b, a', b', pour lesquelles ces relations soient vérifiées identiquement.

Prenons à volonté, dans le polynome φ_1, deux termes du $m^{\text{ième}}$ degré, $Ax^p y^q z^r$, $A'x^{p'} y^{q'} z^{r'}$ tels que, si $Bx^p y^q z^r$ et $B'x^{p'} y^{q'} z^{r'}$ sont les termes semblables de φ_2, la constante $AB' - BA'$ soit différente de zéro; et, $Cx^p y^q z^r$, $C'x^{p'} y^{q'} z^{r'}$ désignant les termes correspondants de f_1, et $Dx^p y^q z^r$, $D'x^{p'} y^{q'} z^{r'}$ ceux de f_2, posons

$$k = \frac{CB' - BC'}{AB' - BA'}, \qquad h = \frac{AC' - CA'}{AB' - BA'},$$

$$k' = \frac{DB' - BD'}{AB' - BA'}, \qquad h' = \frac{AD' - DA'}{AB' - BA'}.$$

Ce seront là les valeurs que doivent avoir les constantes a, b, a', b', multipliées par $(-1)^m$. L'addition de $\pm f_1$ ou de $\pm f_2$ aux deux membres des identités (2) conduit alors à ce théorème :

Quand les deux polynomes (f_1) *et* (f_2) *ne sont pas proportionnels, pour que les deux courbes* F *et* Φ *soient symétriques l'une de l'autre par rapport à un point* ω, *il est nécessaire, et il suffit également, que chacun des deux polynomes*

$$k\varphi_1 + h\varphi_2 - f_1, \qquad k'\varphi_1 + h'\varphi_2 - f_2$$

ait son degré inférieur à m *et de parité contraire à celle de* m, *ou soit nul identiquement, et que les quatre surfaces représentées par les équations*

$$(4) \qquad k\varphi_1 + h\varphi_2 \pm f_1 = 0, \qquad k'\varphi_1 + h'\varphi_2 \pm f_2 = 0$$

aient un centre commun (x_0, y_0, z_0). *Ce point coïncide avec le point* ω.

La condition est suffisante, parce que si l'on pose

$$k\varphi_1 + h\varphi_2 + f_1 = 2u_1, \qquad k\varphi_1 + h\varphi_2 - f_1 = 2v_1,$$

on a

$$f_{-1} = u_{-1} - v_{-1}, \qquad \pm f_{-1} = u_1 + v_1 = k\varphi_1 + h\varphi_2;$$

et l'on aura de même

$$\pm f_{-2} = k'\varphi_1 + h'\varphi_2.$$

Les points ω relatifs aux deux courbes F et Φ sont donc ici les centres communs que peuvent avoir les quatre surfaces définies par les équations (4), les deux polynomes $k\varphi_1 + h\varphi_2 - f_1$ et $k'\varphi_1 + h'\varphi_2 - f_2$ étant supposés remplir les conditions dont il vient d'être parlé.

2° *Les deux polynomes* (f_1), (f_2) *sont proportionnels.* — D'après les relations (3), les quatre polynomes (f_1), (f_2), (φ_1), (φ_2) doivent être les mêmes à un facteur près. Multiplions les quatre équations données par des nombres rendant égaux ces quatre polynomes, et posons alors

$$(5) \qquad f_1 - f_2 = F_1, \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = \Phi_1;$$

on aura, en vertu des identités (3),

$$(-1)^m = a + b = a' + b'$$

et les deux conditions (2) pourront s'écrire

$$(6) \quad f_{-1} - (-1)^m\varphi_1 = -b\Phi_1, \qquad f_{-2} - (-1)^m\varphi_1 = -b'\Phi_1.$$

En les retranchant, on obtient celle-ci :

$$F_{-1} = (b' - b)\Phi_1,$$

qui peut remplacer l'une d'elles. Elle montre que, si l'on considère les deux surfaces représentées par les deux équations connues

$$F_1 = 0, \qquad \Phi_1 = 0 \quad (^1),$$

---

(1) Ces deux équations, de degré inférieur à m, contiendront certainement les variables.

ces deux surfaces devront être de même ordre et symétriques l'une de l'autre par rapport au point ω lui-même. Je suis donc conduit à chercher un point ω' par rapport auquel ces deux surfaces particulières seraient symétriques l'une de l'autre : c'est le problème traité plus haut. Si le point ω' n'existe pas, j'en conclurai qu'il n'y a pas de point ω; si je trouve un seul point ω' ayant pour coordonnées x', y', z', ce point sera un point ω à la condition que l'expression

$$f_1(2x'-x,\ 2y'-y,\ 2z'-z)+(-1)^{m+1}\varphi_1(x,y,z)$$

soit nulle ou proportionnelle à Φ_1 (¹); et il n'y aura pas d'autre point ω que celui-ci. Je vais examiner maintenant l'hypothèse où il y aurait une infinité de points ω' : le lieu de ces points est une droite connue D, ou un plan connu P. Si le point ω existe, il doit appartenir à ce lieu. Faisons une transformation de coordonnées en prenant D pour axe des z dans le premier cas, et P pour plan des xy dans le second cas; et, dans les deux cas, conservons les notations x, y, z, f_1, f_2, φ_1, φ_2 pour désigner les nouvelles coordonnées courantes et les transformées des quatre fonctions données. L'un au moins, f_1, des deux polynomes f_1, f_2 n'étant pas supposé indépendant des variables x, y, comme aussi l'un au moins, φ_1, des polynomes φ_1, φ_2, soient

$$f_1 = U_0(x,y)z^m + U_1(x,y)z^{m-1} + \ldots,$$
$$\varphi_1 = V_0(x,y)z^m + V_1(x,y)z^{m-1} + \ldots,$$

ces deux polynomes ordonnés suivant les puissances décroissantes de z.

Actuellement, les deux polynomes $F_1 = f_1 - f_2$,

(¹) Pour calculer cette expression, on peut prendre indifféremment, pour f_1, l'un ou l'autre des deux polynomes f_1, f_2, et pour φ_1, l'un ou l'autre des polynomes φ_1, φ_2.

$\Phi_1 = \varphi_1 - \varphi_2$ sont, dans le premier cas, des fonctions de x et y seulement, et, dans le second cas, des fonctions de la seule variable z.

Supposons-nous d'abord placé dans le premier de ces deux cas, et écartons pour le moment l'hypothèse où f_1 ne contiendrait pas la variable z. La seule condition à remplir est ici

$$f_1(-x, -y, 2z_0 - z) + (-1)^{m+1}\varphi_1(x, y, z) = -b\Phi_1.$$

$U_\alpha(x, y)$ désignant le premier des polynomes U_0, U_1, ..., qui n'est pas nul de lui-même, écrivons que le terme en $z^{m-\alpha-1}$ du premier membre a son coefficient nul, nous avons la relation

$$2(m-\alpha)z_0 U_\alpha(-x, -y) + U_{\alpha+1}(-x, -y) + (-1)^\alpha V_{\alpha+1}(x, y) = 0.$$

Donc, pour que le point ω existe ici, il faut et il suffit que la fraction finie

$$\frac{(-1)^{\alpha+1} V_{\alpha+1}(x, y) - U_{\alpha+1}(-x, -y)}{2(m-\alpha)U_\alpha(-x, -y)}$$

ait une valeur constante c, et que le polynome

$$f_1(-x, -y, 2c - z) + (-1)^{m+1}\varphi_1(x, y, z)$$

soit nul ou proportionnel à Φ_1. Le point ω, unique, est le point du nouvel axe des z, D, dont la cote est égale à c.

Si f_1 était indépendant de z, il devrait en être de même de chacune des fonctions f_2, φ_1, φ_2 d'après les relations (5) et (6) : les deux figures F, Φ seraient composées de droites parallèles au nouvel axe des z, et tous les points de cet axe seraient des points ω à la condition que le polynome

$$f_1(-x, -y) + (-1)^{m+1}\varphi_1(x, y)$$

fût nul ou proportionnel à $\varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)$.

Supposons-nous maintenant placé dans le second des deux cas considérés.

La condition d'existence du point ω ayant ici la forme

$$f_1(2x_0 - x, 2y_0 - y, -z) + (-1)^{m+1}\varphi_1(x, y, z) = -b\Phi_1$$
$$= -b(M_0 z^m + M_1 z^{m-1} + \ldots) \qquad (M_0 = 0),$$

pour qu'elle soit satisfaite, il faut et il suffit que l'on ait

$$U_n(2x_0 - x, 2y_0 - y) + (-1)^{n+1} V_n(x, y) = (-1)^{m-n+1} b M_n$$
$$(n = 0, 1, \ldots, m).$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont qu'il existe un nombre b tel que, si U_n est une constante, $U_n + (-1)^{n+1} V_n$ soit une constante égale à $(-1)^{m-n+1} b M_n$, et que, dans le cas contraire (qui se présentera pour une valeur de n au moins), les deux fonctions (U_n), $(-1)^{n-\delta}(V_n)$, où δ désigne le degré de U_n, soient identiques entre elles, et les deux courbes du nouveau plan des xy,

$$U_n(x, y) + (-1)^{m-n} b M_n = 0. \qquad V_n(x, y) = 0$$

symétriques l'une de l'autre, quel que soit n, par rapport à un même point [1]. Ce point, unique ou non, est un point ω, et il n'y a pas d'autres points ω que celui-ci.

Cas de deux courbes gauches définies par quatre équations n'ayant pas toutes le même degré [2].

J'emploie les mêmes notations qu'au paragraphe précédent. Soient m le degré de f_1 et m' celui de f_2 $(m > m' > 1)$ [3].

---

[1] La constante b n'interviendra pas dans le calcul des coordonnées de ce point. Cette constante se trouvera connue par le fait des conditions indiquées : elle pourra être nulle.

[2] Il n'y a eu aucune division algébrique à effectuer dans les cas précédemment traités.

[3] Si l'on avait $m' = m$, il faudrait, pour l'existence du point ω, que les quatre équations des deux courbes eussent le même degré.

Pour qu'ici les deux courbes F et Φ soient symétriques l'une de l'autre par rapport à un point

$$\omega(x_0, y_0, z_0),$$

il faut et il suffit que le degré de φ_1 soit égal à m, celui de φ_2 égal à m', que f_{-2} soit proportionnel à φ_2, et qu'enfin le polynome $f_{-1} + a\varphi_1$ soit divisible par φ_2 (¹), pour une certaine valeur non nulle de la constante a. On voit qu'en désignant par S_1, S_2, T_1, T_2 les quatre surfaces représentées respectivement par les équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, les deux surfaces S_2, T_2, d'ordre m', doivent être symétriques l'une de l'autre par rapport au point ω lui-même. La recherche du point ω est donc ramenée à celle d'un point ω′ par rapport auquel ces deux surfaces S_2, T_2 seraient symétriques l'une de l'autre : c'est une des questions traitées plus haut. Si le point ω′ existe et est unique, il ne restera plus, après avoir calculé ses coordonnées, qu'à vérifier l'existence de la constante a, ce qui pourra se faire au moyen d'une division (²).

Examinons le cas où l'on trouverait toute une droite D de points ω′. Le point ω, s'il existe, doit être situé sur cette droite. Les deux surfaces S_2, T_2 sont ici deux cylindres parallèles à D, et l'on peut admettre qu'aucune des deux surfaces S_1, T_1 n'est à son tour un cylindre parallèle à D, puisque autrement il suffirait de vérifier si un point choisi arbitrairement sur D est un point ω pour avoir terminé la question. Rapportons toutes les surfaces

---

(¹) Au lieu de dire, en parlant d'un polynome : *nul ou divisible par...*, je dirai simplement : *divisible par...*, faisant ainsi rentrer dans le cas de la divisibilité d'un polynome par un autre le cas particulier où ce polynome serait identiquement nul.

(²) La question serait terminée si, pour ce point ω′, f_{-1} était proportionnel à φ_1.

à la droite D prise comme axe des z, et conservons les notations employées, en remarquant que f_1 et φ_1 contiendront la variable z, et que f_2 et φ_2 seront deux fonctions indépendantes de z, dont l'une devra devenir proportionnelle à l'autre si l'on y change x et y en $-x$ et $-y$. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence du point ω est alors que le polynome

$$(7) \qquad f_1(-x, -y, 2z_0 - z) + a\varphi_1(x, y, z)$$

soit divisible par φ_2. Admettons que ce point existe. Posons

$$f_1(x, y, z) = U_0(x, y)z^m + U_1(x, y)z^{m-1} + \ldots,$$
$$\varphi_1(x, y, z) = V_0(x, y)z^m + V_1(x, y)z^{m-1} + \ldots,$$

et soit $U_\beta(x, y)$ le premier des polynomes $U_0(x, y)$, $U_1(x, y)$, ..., qui n'est pas divisible par f_2 [1]. La première des fonctions $U_0(-x, -y)$, $U_1(-x, -y)$, ... qui ne contient pas φ_2 en facteur sera $U_\beta(-x, -y)$. Le polynome (7) étant divisible par φ_2, la partie de ce polynome qui a pour expression

$$a\varphi_1(x, y, z) - U_\beta(-x, -y)(2z_0 - z)^{m-\beta}$$
$$- U_{\beta+1}(-x, -y)(2z_0 - z)^{m-\beta-1} + \ldots$$

devra jouir de la même propriété. Prenons, dans cette expression, les termes en $z^{m-\beta}$ et $z^{m-\beta-1}$. Leurs coefficients, qui sont les deux polynomes

$$(-1)^{m-\beta} U_\beta(-x, -y) + aV_\beta(x, y),$$
$$(-1)^{m-\beta+1}[2(m-\beta)z_0 U_\beta(-x, -y) + U_{\beta+1}(-x, -y)]$$
$$+ aV_{\beta+1}(x, y),$$

---

[1] f_1 n'est pas supposé divisible par f_2, ni φ_1 par φ_2.

Je puis admettre que β est plus petit que m; car, dans l'hypothèse $\beta = m$, la fonction (7), et celle-ci,

$$U_m(-x, -y) + a\varphi_1(x, y, z),$$

sont divisibles par φ_2 en même temps l'une que l'autre, quelle que soit du reste la valeur de z_0.

devront être divisibles par φ_2. La première de ces deux conditions exige que $V_\beta(x, y)$ ne soit pas divisible par φ_2 : elle fera connaître la valeur de la constante a. La seconde condition donnera ensuite la valeur de z_0 [1]. Pour achever le problème, il faudra voir si, avec les valeurs de a et z_0 ainsi calculées, valeurs qui seront uniques, le polynome (7) est bien divisible par φ_2.

Il nous reste encore à examiner le cas où il y aurait tout un plan P de points ω'. Le point ω, s'il existe, doit appartenir à ce plan. Prenons le plan P pour plan des yz, et conservons les notations adoptées, en observant que f_2 et φ_2 seront maintenant des fonctions de la seule variable x (dont l'une devient proportionnelle à l'autre quand on y change x en $-x$), et que ni f_1 ni φ_1 ne pourront être des fonctions de x seulement. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence du point ω est ici que le polynome

$$(8) \qquad f_1(-x, 2y_0 - y, 2z_0 - z) + a\,\varphi_1(x, y, z)$$

soit divisible par φ_2. Ordonnons le polynome $f_1(x, y, z)$ par groupes homogènes de degrés décroissants relativement aux deux variables y, z, et soient

$$A_0(x)\,z^{m-p} + A_1(x)\,z^{m-p-1}y + A_2(x)\,z^{m-p-2}y^2 + \ldots$$

le premier de ces groupes dont tous les coefficients ne sont pas divisibles par f_2, et $A_r(x)$ le premier des coefficients $A_0(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., qui n'est pas lui-même divisible par f_2. Je puis toujours supposer, sauf à

---

[1] On pourra généralement abréger ces calculs de a et z_0 en fixant à volonté l'une des deux variables x ou y, soit y, dans les fonctions U, V, f_2, φ_2, si, pour cette valeur donnée à y, les polynomes en x, U_0, U_1, ..., U_{m-1} ne sont pas tous divisibles par f_2. Ici, $U_\beta(x, y)$ désignerait le premier de ces polynomes qui ne remplit pas cette condition de divisibilité.

échanger les lettres y, z, que la variable y figure dans le terme correspondant $A_r(x)z^{m-p-r}y^r$, en sorte que r n'est pas nul.

Je désigne le groupe suivant par

$$B_0(x)z^{m-p-1} + B_1(x)z^{m-p-2}y + B_2(x)z^{m-p-3}y^2 + \ldots$$

Soient aussi

$$C_0(x)z^{m-p} + C_1(x)z^{m-p-1}y + C_2(x)z^{m-p-2}y^2 + \ldots$$

et

$$D_0(x)z^{m-p-1} + D_1(x)z^{m-p-2}y + D_2(x)z^{m-p-3}y^2 + \ldots$$

les deux groupes de termes de $\varphi_1(x, y, z)$ qui sont de degrés $m-p$ et $m-p-1$ relativement aux deux variables y, z. Dans l'hypothèse où le point ω existe, la partie du polynome (8) qui a pour expression

$$\begin{aligned}
&a\varphi_1(x, y, z) + A_r(-x)(2z_0 - z)^{m-p-r}(2y_0 - y)^r \\
&\quad + A_{r+1}(-x)(2z_0 - z)^{m-p-r-1}(2y_0 - y)^{r+1} + \ldots \\
&\quad + B_0(-x)(2z_0 - z)^{m-p-1} \\
&\quad + B_1(-x)(2z_0 - z)^{m-p-2}(2y_0 - y) + \ldots \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

doit être divisible par φ_2. Donc les coefficients qui affectent les termes en $z^{m-p-r}y^r$ et $z^{m-p-r}y^{r-1}$, dans cette expression, à savoir

$$\begin{aligned}
&(-1)^{m-p}A_r(-x) + aC_r(x), \\
&(-1)^{m-p+1}[2ry_0A_r(-x) + B_{r-1}(-x)] + aD_{r-1}(x),
\end{aligned}$$

devront être divisibles par φ_2. Si l'on remarque que $C_r(x)$ ne peut pas, d'après la première de ces deux conditions, être divisible par φ_2, on voit que ces deux conditions feront connaître, la première, la valeur de la constante a, puis la seconde celle de y_0. Il n'y a que deux valeurs de a et y_0 qui puissent satisfaire à ces deux conditions de

divisibilité. Ces deux nombres étant calculés de la sorte, si $f_1(x, y, z)$ est indépendant de z, la question se trouvera ramenée à voir si le polynome (8), alors complètement connu, est divisible par φ_2, et tous les points de la droite $y = y_0$ du nouveau plan des yz seraient des points ω. Dans l'hypothèse contraire, pour avoir la valeur de z_0, on est ramené au cas qui vient d'être traité. Cette valeur se calculera donc par la condition que le polynome

$$(-1)^{m-\beta+1}[2(m-\beta)z_0 U_\beta(-x, 2y_0-y) + U_{\beta+1}(-x, 2y_0-y)] + aV_{\beta+1}(x, y)$$

soit divisible par la fonction φ_2 de x, $U_\beta(x, y)$, $U_{\beta+1}(x, y)$ et $V_{\beta+1}(x, y)$ étant définis comme dans ce cas. Il restera à s'assurer si, avec les valeurs uniques ainsi trouvées pour a, y_0, z_0, le polynome (8) est bien divisible par φ_2.

Centre d'une courbe gauche.

Pour reconnaître si l'intersection F de deux surfaces S_1, S_2, d'ordres m et m' ($m' \leqq m$), ayant pour équations entières

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0,$$

possède un centre, et pour déterminer ce point, il suffira d'appliquer les méthodes que je viens d'exposer en se plaçant dans le cas où les polynomes φ_1, φ_2 sont les mêmes que les polynomes f_1, f_2. Il est facile de voir ce que deviennent, dans ce cas, les résultats fournis par l'analyse précédente. Je me bornerai à énoncer ces deux-ci :

Quand m' est inférieur à m, si la courbe F a un centre, ce point doit être aussi centre de la surface S_2 ;

Quand m' égale m, si le rapport de (f_1) à (f_2) n'est pas constant, la courbe F n'admet, en fait de centres, que les centres que peuvent avoir en commun les deux surfaces S_1, S_2.

L'intersection de deux surfaces qui n'ont pas le même cône asymptotique n'a pas de centre si aucune des deux surfaces ne possède de centre.

Remarque. — En supposant que les équations par lesquelles sont définies les deux figures F, Φ, distinctes ou confondues, ne dépendent que de deux mêmes variables, on a, par ce qui précède, sans le secours de l'élimination, une solution de ces deux problèmes de Géométrie plane :

1° *Reconnaître si le système des points communs à deux courbes algébriques admet un centre, et trouver ce centre;*

2° *Reconnaître si deux systèmes analogues au précédent sont symétriques l'un de l'autre par rapport à un point, et déterminer ce point.*

Dans les deux cas, le point en question doit être un centre de courbes planes algébriques dont on connaît les équations.

Nota. — Connaissant les équations de deux figures algébriques, on sait, ainsi qu'il résulte d'une Note que j'ai communiquée à l'Académie des Sciences [1], former des équations de surfaces du second ordre jouissant de cette propriété que, si les deux figures sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un point ω, ces quadriques doivent avoir pour centre le point ω. On pourrait faire usage de ces quadriques pour reconnaître l'existence et

[1] *Comptes rendus*, 11 septembre 1899.

la position du point ω; mais leur emploi serait insuffisant à résoudre la question si elles possédaient une infinité de centres communs.

[$L^2$4c]

SUR LE MINIMUM DE L'ANGLE QUE FAIT UN DIAMÈTRE D'UN ELLIPSOÏDE AVEC SON PLAN DIAMÉTRAL CONJUGUÉ;

PAR M. BLUTEL,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

Si l'on appelle x, y, z les paramètres directeurs d'une corde, l'angle V que fait cette corde avec le plan diamétral conjugué est fourni par la formule

$$(1)\quad \sin^2 V\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)(x^2+y^2+z^2)-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=0.$$

Cette équation, où V est donné, définit un cône du quatrième degré, lieu des cordes répondant à la question. L'angle V sera maximum ou minimum quand ce cône présentera une génératrice *double isolée*.

L'application des méthodes usuelles pour la recherche des génératrices doubles montre que ces génératrices sont nécessairement dans un des plans de coordonnées.

1° Une pareille génératrice est confondue avec l'un des axes, cela exige $\sin^2 V = 1$.

2° Une pareille génératrice n'est pas confondue avec l'un des axes.

Si elle est dans le plan $z = 0$, on démontre de suite qu'elle est confondue avec l'un des diamètres conjugués

égaux de l'ellipse principale

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et alors

$$\sin^2 V = \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (1), on est amené à étudier le cône

$$4a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)(x^2+y^2+z^2)$$
$$-(a^2+b^2)^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = 0$$

dans le voisinage de la droite

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{0},$$

ou bien, ce qui revient au même, en prenant la trace du cône sur le plan $(y = b)$, cela revient à étudier la courbe

$$4a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4} + \frac{1}{b^2}\right)(x^2+z^2+b^2)$$
$$-(a^2-b^2)^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1\right)^2 = 0$$

dans le voisinage du point $(x = a,\ z = 0)$.

En y transportant l'origine, on vérifie que c'est bien un point double et que les tangentes y sont fournies par l'équation

$$\frac{X^2}{a^2}(a^2-b^2)^2 - (a^2-b^2)\frac{Z^2}{c^4}(c^2-a^2)(c^2-b^2) = 0.$$

Ces tangentes seront imaginaires si l'on a

$$(c^2-a^2)(c^2-b^2) < 0,$$

ce qui exige que c soit l'*axe moyen*.

On n'obtient donc un minimum *non seulement absolu, mais relatif,* que si la corde en question est confondue avec un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse principale dont le plan est perpendiculaire à l'axe moyen [1].

SOLUTION DU PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1899;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Je vais, comme j'ai fait plusieurs fois dans les *Nouvelles Annales,* indiquer une solution, bien simple, du problème de Mécanique proposé au Concours d'agrégation de 1899. Je résume l'énoncé :

Une sphère S, *pesante, homogène, non élastique, de rayon* ρ, *de masse* m, *d'abord en repos sur un plan horizontal* H *parfaitement poli, est choquée, en un point* P *de sa surface, par un point* M, *de poids* mg, *animé d'une vitesse horizontale connue et non tangente à* S; *après le choc,* M *s'incruste en* P *sur la sphère. Déterminer le mouvement du système aussitôt après le choc; dire dans quelles régions doit se trouver* P *pour que la sphère soit soulevée, ou ne le soit pas, au-dessus du plan* H. *Calculer, dans les deux cas, la perte de force vive. Chercher, dans le second cas, le mouvement ultérieur du système.*

---

[1] Cette Note a été rédigée à la demande de M. Appell, qui s'est servi de ce théorème de Géométrie dans un article relatif aux expériences du commandant Hartmann (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1900).

Prenons des axes rectangulaires fixes dont l'origine O coïncide avec le centre de S avant le choc, OX dirigé dans le sens de la vitesse initiale du point M, vitesse égale à V, OZ suivant la verticale ascendante. Soient x, y, z les coordonnées initiales de P : x est nécessairement négatif. Je fais $m = 1$ et le moment d'inertie μ de S autour d'un de ses diamètres est $\frac{2}{5}\rho^2$. Je définirai le mouvement du système immédiatement après le choc par les composantes u, v, w de la vitesse acquise par le centre de la sphère et par les composantes p, q, r de la rotation instantanée ω. La vitesse du point M, égale à celle de P, aura pour composantes

$$u + qz - ry, \qquad v + rx - pz, \qquad w + py - qx.$$

Supposons d'abord que S doive être soulevée au-dessus du plan H et, par suite, que w soit positif. La somme des projections des quantités de mouvement étant la même avant et après le choc, nous avons trois équations :

$$(1) \qquad \begin{cases} V = 2u + qz - ry, \\ 0 = 2v + rx - pz, \\ 0 = 2w + py - qx; \end{cases}$$

la conservation de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport aux trois axes donne encore

$$(2) \qquad \begin{cases} 0 = \mu p + y(w + py - qx) - z(v + rx - pz), \\ Vz = \mu q + z(u + qz - ry) - x(w + py - qx), \\ -Vy = \mu r + x(v + rx - pz) - y(u + qz - ry). \end{cases}$$

Ajoutant ces équations respectivement multipliées par x, y, z, on a :

$$(3) \qquad px + qy + rz = 0,$$

cette équation exprime que ω est perpendiculaire à OP;

on pouvait l'écrire à l'avance parce que ω doit être dirigé suivant le diamètre conjugué du plan du couple de percussion par rapport à l'ellipsoïde central de S, qui est lui-même une sphère. Les équations (1) donnent

$$(4)\qquad u = \frac{V + ry - qz}{2}, \qquad v = \frac{pz - rx}{2}, \qquad w = \frac{qx - py}{2}.$$

Je substitue ces valeurs dans les équations (2), puis, en vertu de la relation (3), je remplace, dans la première des équations obtenues, les termes $-\frac{qy - rz}{2}x$ par $\frac{px^2}{2}$; dans la seconde, les termes en y deviennent de même $\frac{qy^2}{2}$; dans la troisième, les termes en z deviennent $\frac{rz^2}{2}$. Je forme ainsi trois équations renfermant chacune une seule inconnue, et, en remplaçant μ par $\frac{2}{5}\rho^2$, $x^2 + y^2 + z^2$ par ρ^2, j'en tire

$$p = 0, \qquad q = \frac{5Vz}{9\rho^2}, \qquad r = -\frac{5Vy}{9\rho^2};$$

puis les équations (4) donnent, après de simples réductions,

$$u = \frac{9x^2 + 4y^2 + 4z^2}{18\rho^2}V, \qquad v = \frac{5xyV}{18\rho^2}, \qquad w = \frac{5xzV}{18\rho^2}.$$

Pour être d'accord avec notre hypothèse, il faut que la valeur trouvée pour w soit positive; x étant négatif, z doit l'être aussi et le point P situé sur la moitié inférieure de la surface S, ce qui semble assez évident *a priori*.

Calculons directement la perte Q de force vive due au choc,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} Q = V^2 - u^2 - v^2 - w^2 - \mu\omega^2 - (u - qz - ry)^2 \\ - (v - rx - pz)^2 - (w - py - qx)^2; \end{aligned}\right.$$

remplaçant u, v, w par leurs valeurs (4), on trouve, après réduction des termes semblables,

$$Q = \frac{1}{2}V^2 - \mu\omega^2 - \frac{1}{2}[(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2].$$

En vertu de l'identité de Lagrange et de la relation (3), la quantité entre crochets se réduit à

$$(p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

et l'on a

$$Q = \frac{1}{2}V^2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)\rho^2\omega^2 = \frac{9x^2 + 4y^2 + 4z^2}{18\rho^2}V^2 = Vu.$$

Un calcul analogue permettrait de vérifier le théorème de Carnot. Mais si l'on admet *a priori* l'application de ce théorème, on arrivera presque immédiatement à la valeur précédente de Q. Écrivons, en effet, que la force vive perdue est égale à la force vive due aux vitesses perdues; on a

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} Q = u^2 + v^2 + w^2 + \mu\omega^2 + (V - u - qz + ry)^2 \\ + (v - rx - pz)^2 + (w + py - qx)^2. \end{aligned}\right.$$

Ajoutons membre à membre avec l'équation (5); il se produit d'énormes réductions grâce à ce fait que S était d'abord en repos et la vitesse initiale de M parallèle à OX; il reste

$$2Q = 2V^2 - 2V(u + qz + ry) = 2V(V - u - qz + ry);$$

or, en vertu de la première équation (1), la dernière parenthèse est égale à u, et Q à Vu.

Passons au cas où S doit rester sur le plan H, w étant nul. La sphère reçoit du plan une percussion N, mais comme celle-ci est dirigée suivant OZ, nous aurons encore les deux premières équations (1) et (4), les équations (2) avec w nul et la relation (3). Si, dans les

équations (2), je remplace u et v par leurs valeurs (4), j'obtiens des équations un peu moins symétriques que dans le premier cas :

$$(7) \qquad 0 = \mu p + y(py - qx) - z\frac{rx - pz}{2},$$

$$(8) \qquad \frac{1}{2}Vz = \mu q + z\frac{qz - ry}{2} - x(py - qx),$$

$$(9) \qquad -\frac{1}{2}Vy = \mu r + x\frac{rx - pz}{2} - y\frac{qz - ry}{2}.$$

L'équation (9) est la même que l'équation correspondante dans le premier cas et nous en tirerons encore pour r,

$$r = -\frac{5Vy}{9\rho^2};$$

donc, eu égard à l'équation (3),

$$(10) \qquad px + qy = \frac{5Vyz}{9\rho^2}.$$

Ajoutons les équations (7) et (8) multipliées par y et par $-x$:

$$-\frac{1}{2}Vxz = \left(\mu + x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2\right)(py - qx);$$

d'où, en posant $x^2 + y^2 = \alpha^2$,

$$(11) \qquad py - qx = -\frac{5Vxz}{9\rho^2 + 5\alpha^2}.$$

Des équations (10) et (11) on tire,

$$p = \frac{25Vxyz}{9\rho^2(9\rho^2 + 5\alpha^2)}, \qquad q = \frac{5Vz(9\rho^2 + 5y^2)}{9\rho^2(9\rho^2 + 5\alpha^2)},$$

et les valeurs (4) de u, v deviennent

$$u = \frac{(63x^2 + 28y^2 + 18z^2)V}{9(9\rho^2 + 5\alpha^2)}, \qquad v = \frac{35Vxy}{9(9\rho^2 + 5\alpha^2)}.$$

La percussion N est égale à l'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées sur OZ, ou à $py - qx$, dont nous avons la valeur (11) : or N doit être positive ; il faut donc que xz soit négatif et, par suite, z positif : le point P sera sur la moitié supérieure de la surface de S.

On peut calculer directement, comme dans le premier cas, la perte de force vive due au choc : ce calcul exige quelque attention. Mais on peut aussi employer la méthode qui nous a conduit si rapidement au résultat : la perte de force vive est encore exprimée par la formule (5) où w serait nul : le théorème de Carnot conduit encore à l'équation (6) malgré l'intervention de la percussion N, parce que son travail est nul : en combinant les deux expressions, on trouve, comme dans le premier cas, que la force vive perdue est égale à Vu.

Le mouvement ultérieur du système est celui d'un solide de révolution qui glisse sans frottement sur un plan horizontal. Le solide a son centre de gravité G au milieu du rayon de S qui aboutit en P : sa masse est égale à 2 ; ses moments d'inertie autour de l'axe de figure GP et d'une perpendiculaire quelconque menée par le point G sont

$$C = \frac{2}{5}\rho^2, \qquad A = \frac{2}{5}\rho^2 + \frac{2}{4}\rho^2 = \frac{9}{10}\rho^2.$$

Conservons les axes fixes du début et définissons la position du solide à l'instant t par les coordonnées ξ, η, ζ du point G et par les angles d'Euler θ, ψ, φ ; θ étant l'angle de GP avec OZ, ζ est égal à $\frac{1}{2}\rho\cos\theta$ et la force vive

$$2T = 2\xi'^2 + 2\eta'^2 + \frac{1}{2}\rho^2\theta'^2\sin^2\theta$$
$$+ A(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) + C(\varphi' - \psi'\cos\theta)^2.$$

Pour un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, le travail des forces agissant sur le système est $-2g\delta\zeta$ ou $g\rho\sin\theta\,\delta\theta$; les équations de Lagrange relatives à ξ, η, φ, ψ sont

$$\frac{d\xi'}{dt} = 0, \qquad \frac{d\eta'}{dt} = 0, \qquad \frac{d(\varphi' + \psi'\cos\theta)}{dt} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[\,A\psi'\sin^2\theta + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta\,] = 0.$$

Les deux premières expriment que ξ', η' ont des valeurs constantes, qui sont évidemment $\frac{1}{2}V$ et zéro. La valeur de $\varphi' + \psi'\cos\theta$ est aussi constante et égale à la projection de la rotation initiale ω sur GP, c'est-à-dire à $\frac{px + qy - rz}{\rho}$ ou, (3), à zéro. On a donc toujours

$$\varphi' + \psi'\cos\theta = 0.$$

Mais ce résultat simplifie beaucoup la quatrième équation de Lagrange, qui exprime alors l'invariabilité de $\psi'\sin^2\theta$; ce produit, qui représente dans le cas actuel la projection de la rotation instantanée du système sur OZ, est égal à sa valeur initiale r,

$$\psi'\sin^2\theta = r.$$

Au lieu de la cinquième équation de Lagrange, prenons l'intégrale des forces vives : eu égard aux résultats précédents, elle peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{2}\rho^2\sin^2\theta + A\right)\theta'^2 + A\frac{r^2}{\sin^2\theta} + 2g\rho\cos\theta = h.$$

La constante h est la valeur initiale du premier membre. Or $\rho\cos\theta_0$ est égal à z, $\rho\sin\theta_0$ à α; θ'_0 est la projection de ω sur une horizontale perpendiculaire à GP et dont les cosinus directeurs sont $-\frac{y}{\alpha}$, $\frac{x}{\alpha}$, 0;

sa valeur $\frac{qx - py}{\alpha}$ est donnée par la formule (11). Remplaçant les quantités connues par leurs valeurs et faisant les réductions, je trouve

$$h = \frac{5V^2}{18} \frac{14y^2 + 9z^2}{9\rho^2 + 5\alpha^2} + 2gz,$$

valeur essentiellement positive. Si, enfin, dans l'intégrale des forces vives je prends pour inconnue $\rho \cos\theta = \lambda$, au lieu de θ, l'équation peut se mettre sous la forme

$$(12) \left\{ \begin{aligned} & \frac{14\rho^2 - 5\lambda^2}{10} \frac{d\lambda^2}{dt^2} \\ & = \left[\frac{5V^2}{18} \frac{14y^2 + 9z^2}{9\rho^2 + 5\alpha^2} + 2g(z - \lambda)\right](\rho^2 - \lambda^2) - \frac{5V^2 y^2}{18}. \end{aligned} \right.$$

Les variables se séparent et t s'exprime par une intégrale abélienne en λ; λ lui-même oscille entre deux limites comprises entre $-\rho$ et ρ et toujours différentes. Le cas de $x = 0$ est exclu; si y est nul, ψ' et φ' le sont aussi; t est encore donné par une intégrale abélienne, mais on voit que le second membre de l'équation (12) s'annule quand λ est égal à $\pm\rho$ ou à

$$\lambda_1 = z - \frac{5V^2 z^2}{4(9\rho^2 + 5x^2)g};$$

λ varie entre $-\rho$ et la plus petite des deux quantités λ_1, ρ; si c'est ρ, le solide tourne toujours dans le même sens autour d'une parallèle à OY menée par le point G; si c'est λ_1, le sens de la rotation sera variable; si $\lambda_1 = \rho$, GP deviendra vertical au bout d'un temps infini. Quand z est nul, λ varie entre zéro et la racine négative de l'équation

$$\lambda^2 - \frac{5V^2 y^2}{36g\rho^2}\lambda - \rho^2 = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Éléments de la Théorie des nombres; par M. *E. Cahen*. VIII+403 pages grand in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1900. Prix : 12fr.

Le Livre que vient de publier M. Cahen était vivement désiré et son Auteur a tous les titres à notre reconnaissance.

Depuis le célèbre Traité de Legendre, il n'avait pas paru en France d'Ouvrage où fussent réunies et exposées d'une façon complète les doctrines fondamentales de la théorie des nombres. Or, le Traité de Legendre, quoique riche en résultats, a vieilli sur beaucoup de points et ne répond plus aux exigences actuelles.

D'autres auteurs, en des Ouvrages qui n'étaient pas consacrés à la théorie des nombres, ont été amenés à exposer assez complètement certaines parties de cette Science; mais, naturellement, ils ont laissé de côté tout ce qui n'était pas indispensable à leur sujet. Aussi, l'*Algèbre supérieure,* de Serret, qui renferme des développements étendus sur les fractions continues et sur les congruences, est muette sur les formes quadratiques.

Il y avait ainsi, dans la littérature mathématique française de notre époque, une lacune bien regrettable à un double point de vue.

En premier lieu, la théorie des nombres se relie étroitement aux autres parties des Mathématiques, et l'on sait que, principalement dans les recherches élevées de l'Analyse, beaucoup de vérités revêtent un caractère nettement arithmétique. Par exemple, on ne peut guère arriver à l'intelligence complète des théories concernant les fonctions automorphes, la transformation des fonctions elliptiques et celle des fonctions abéliennes sans connaître au moins dans leurs parties essentielles les propriétés des formes quadratiques à coefficients entiers et des irrationnelles qui s'y rattachent.

On sait aussi combien, dans ces dernières années, les questions relatives à la distribution des nombres premiers ont contribué à attirer l'attention des analystes sur les propriétés des

fonctions entières, et comment les recherches ainsi provoquées ont amené de mémorables découvertes.

Les personnes désireuses de pousser un peu loin leurs études mathématiques étaient donc obligées, pour acquérir des connaissances véritablement indispensables, de s'adresser à des Ouvrages étrangers, allemands pour la plupart, fort bien faits sans doute, mais dont la lecture n'est pas accessible à tous.

Le Livre de M. Cahen, appelé à rendre de grands services à ceux qui veulent étudier l'Arithmétique en vue de ses applications à d'autres parties de la Science, ne sera pas moins bien accueilli de ceux qui chérissent la théorie des nombres pour elle-même. Et ces derniers ne seront pas les moins nombreux : Sur beaucoup d'esprits, les propriétés des nombres entiers exercent un charme d'une singulière puissance, dont on peut discerner diverses raisons : d'abord, de toutes les vérités mathématiques, celles de l'ordre arithmétique empruntent le moins à l'expérience, et les postulats dont elles dérivent sont ceux que l'on ne pourrait rejeter sans s'interdire de penser. Il suffit de dire : *J'ai la faculté de distinguer, d'associer et de compter des concepts*, pour en conclure avec une rigueur absolue : ***tout nombre entier est la somme de quatre carrés.*** Cela est indépendant de tout renseignement que nos sens peuvent nous donner sur le monde, et ce caractère d'abstraction et de certitude parfaite revêt l'Arithmétique d'une incontestable beauté.

En second lieu, les propositions de la théorie des nombres ont fréquemment des énoncés d'une simplicité frappante, intelligibles presque sans initiation mathématique, même quand leur démonstration a exigé les efforts de l'invention la plus subtile, même quand cette démonstration nous reste encore inaccessible. Enfin, cette étude qui, rapidement, conduit aux problèmes les plus difficiles peut-être qui puissent se poser aux Géomètres, n'exige point de connaissances préalables. Le premier venu, réunissant les conditions de savoir lire, d'avoir l'esprit mathématique et de goûter les jouissances abstraites, peut aborder la théorie des nombres et prendre part, après quelques jours, aux spéculations les plus élevées de l'esprit humain.

Le Livre de M. Cahen remplit parfaitement ce double programme : d'une part, exposer les parties de l'Arithmétique qui sont essentielles pour l'intelligence complète d'autres théories ;

de l'autre, être accessible aux lecteurs les plus dénués de préparation, en ne faisant appel à aucune notion antérieurement acquise. Cette dernière préoccupation est visible dans tout l'Ouvrage, qui, d'un bout à l'autre, se suffit à lui-même. La rédaction en est fort claire, les résultats sont mis nettement en évidence, au fur et à mesure qu'ils sont acquis. Enfin, de nombreux exemples numériques permettent au lecteur de se rendre compte de la valeur pratique des méthodes exposées, tout en le reposant des considérations abstraites.

Une courte analyse montrera le plan que s'est tracé l'Auteur:

Le Chapitre I résume les théories les plus élémentaires concernant les opérations fondamentales, la numération, la divisibilité, les nombres premiers, les nombres fractionnaires.

Le Chapitre II contient un complément de ces théories élémentaires. On y étudie les diviseurs des nombres, les indicateurs des divers ordres (dont des recherches récentes ont montré l'importance), la décomposition en facteurs de $n!$. Les nombres négatifs sont alors introduits et le Chapitre se termine par l'exposé des propriétés les plus simples des fractions continues.

Au Chapitre III, nous pénétrons dans la théorie des nombres proprement dite, avec la notation des congruences, l'analyse indéterminée du premier degré, les congruences binomes, les racines primitives et les indices, les théorèmes de Fermat, d'Euler et de Wilson. Ces derniers se trouvent élégamment généralisés par la considération des fonctions symétriques des nombres inférieurs à un nombre premier donné.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude des résidus quadratiques et aux congruences du second degré. L'Auteur y étudie avec grand soin cette célèbre *loi de réciprocité*, de Legendre, sur laquelle tant d'illustres géomètres ont exercé leur sagacité. Il en donne les deux démonstrations les plus simples connues, et passe à l'extension faite par Jacobi du symbole de Legendre, extension si importante au point de vue des calculs numériques, indépendamment de son grand intérêt théorique. Il applique ensuite les théories précédentes à la résolution des congruences du second degré. Dès maintenant (et nous ne sommes pas à la moitié du Livre), le lecteur peut éprouver la satisfaction que donne la solution complète et irréprochable d'une question difficile.

Au Chapitre V sont introduits les nombres incommensurables, définis au moyen d'ensembles de nombres rationnels et dont la notion, bien qu'étrangère à la théorie des nombres proprement dite, est indispensable pour la suite. On étudie le développement de ces nombres en fractions continues, puis vient l'examen des critères, malheureusement encore bien imparfaits, qui permettent de distinguer les nombres rationnels des incommensurables et les nombres algébriques des nombres transcendants. Le théorème de Liouville sur les nombres algébriques est établi et le Chapitre se termine par l'étude du développement en fractions continues des nombres algébriques du second degré, les seuls sur lesquels nos connaissances aient acquis, jusqu'à ce jour, quelque précision.

Le Chapitre VI, de beaucoup le plus important, est consacré à l'étude des formes quadratiques binaires. On peut dire que c'est le véritable sujet du Livre, semblable, en cela, à la *Zahlentheorie*, de Dirichlet; mais M. Cahen, qui s'est évidemment guidé sur l'illustre auteur allemand, ne l'a pas imité servilement.

Deux notions importantes, celle des *groupes de substitutions modulaires* et celle des *congruences de substitutions*, dont M. Cahen fait un emploi systématique, permettent en effet de rendre l'exposition plus claire en bien des points et, en même temps, font mieux ressortir la philosophie des méthodes suivies.

Après une courte étude des substitutions modulaires, sont énoncés les trois problèmes fondamentaux que pose la question de l'équivalence des formes. Ils sont ensuite résolus, d'abord pour les formes à discriminant positif, puis pour celles à discriminant négatif. L'étude faite, dans un Chapitre antérieur, du développement en fractions continues des irrationnelles quadratiques, rend la lecture de ces dernières pages sensiblement plus facile que celle de Dirichlet.

J'exprimerai ici un regret (le seul d'ailleurs que m'ait laissé la lecture de l'Ouvrage tout entier): c'est que le désir de se restreindre ait empêché M. Cahen de faire connaître les représentations géométriques si simples et si ingénieuses que M. Klein a imaginées pour les formes réduites, et qui se rattachent aux théories des fonctions modulaires et fuchsiennes.

Le Livre est complété par plusieurs Notes intéressantes, parmi lesquelles je citerai comme particulièrement suggestives

celles sur les *nombres premiers,* sur le *groupe modulaire,* sur les *fonctions numériques,* sur les *nombres entiers imaginaires,* et, enfin, par des Tables numériques empruntées à la *Théorie des congruences,* de Tchebycheff.

En terminant, je formerai l'espoir que M. Cahen ne tardera pas à accomplir une promesse faite par lui dans la Préface de son Livre : c'est de nous donner un second Volume, suite naturelle de celui-ci, et consacré à l'Arithmétique transcendante [nombre des classes de formes quadratiques, idéaux, fonction $\zeta(s)$, etc.]. Ces théories ont fait l'objet de beaux travaux contemporains, parmi lesquels ceux de M. Cahen lui-même occupent une place distinguée.

Il y a grand intérêt à les réunir dès maintenant en corps de doctrine et tous les lecteurs du présent Volume penseront comme moi que nul, mieux que son auteur, n'est désigné pour accomplir cette tâche. RAOUL BRICARD.

ERRATA.

Page 188, la question 573 est énoncée d'une manière inexacte comme l'a fait voir M. Mister (1872, p. 22) et doit être retirée.

Page 371, cinquième ligne, lisez *tangente* au lieu de *génératrice.*

Page 382, les questions 482 et 539 ont déjà été résolues et doivent être retirées.

Même page, la question 558 doit être changée en 598.

Page 383, la question 1856 doit porter le n° 1856bis.

Page 383, question 1858, au lieu de *prouvez,* lisez *prouver.*

Page 384, question 1861, au lieu de *montrez,* lisez *montrer.*

AVIS IMPORTANT.

Les questions proposées dans le numéro de septembre portent un numérotage erroné. Au lieu des n°s 1855 *à* 1861, *elles doivent porter les n^{os}* 1867 *à* 1873. *Nous prions nos lecteurs de vouloir bien faire la rectification nécessaire.*

PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1901.

Sujet.

On dit qu'un point M *décrit une courbe* C *suivant la loi des aires, le centre des aires étant un point* S, *lorsque la portion de droite* SM *décrit des aires qui varient proportionnellement au temps sur la surface du cône qui a pour sommet le point* S *et pour directrice la courbe* C.

On demande d'étudier les mouvements pour lesquels il existe deux ou trois centres des aires.

Conditions.

Le Concours est ouvert à *tous* les lecteurs des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

1° A un crédit de 100fr d'Ouvrages à choisir dans le Catalogue de M. Gauthier-Villars;

2° A la publication du Mémoire;

3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la Rédaction AVANT LE 15 MAI 1901, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonyme

Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir du 15 mai et après le jugement prononcé.

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mémoires; mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du reste que l'insertion d'un Travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 15 juin 1901, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La Rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1° De partager les récompenses ci-dessus mentionnées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite;

2° De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient reportés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire connaître sans retard s'il désire que la publication de son travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

Les Rédacteurs.

[G2]

SUR LES SUBSTITUTIONS UNIFORMES ET LE PROBLÈME DE BABBAGE;

PAR M. E. IAGGI.

MM. Leau et Lémeray se sont occupés à plusieurs reprises, dans ce Journal et dans d'autres Recueils, des fonctions itérées

$$f_n(x) = f_{n-1}[f_1(x)]$$

en supposant que l'itération de f_1 ne produise qu'un nombre fini m de fonctions distinctes, c'est-à-dire que

$$f_{m+1}(x) = x,$$

et M. Leau a notamment démontré que, lorsque les f_n sont uniformes, elles sont algébriques et linéaires (¹).

Or on peut démontrer que ces fonctions sont linéaires non seulement dans le cas particulier d'un groupe d'un nombre fini de substitutions obtenues avec une seule substitution fondamentale f_1, mais même dans le cas général d'un groupe de substitutions uniformes, en nombre quelconque fini ou infini, obtenues par répétitions et combinaisons de substitutions fondamentales en nombre quelconque.

On sait que, si $f_n(x)$ est une substitution d'un groupe quelconque, la fonction $f_{-n}(x)$, obtenue par inversion de f_n, fait aussi partie du groupe (²) (dans le cas par-

(¹) *Sur les fonctions itérées.* Note de M. Leau parue en 1898 dans le ***Bulletin de la Société Mathématique.***

(²) *Recherches sur la Théorie des fonctions*, par M. Iaggi. Besançon, 1897.

ticulier précédent, f_1 et f_m, f_p et f_{m-p+1} sont inverses deux à deux); il s'ensuit que, si f_n et f_{-n} sont uniformes, elles sont linéaires. On peut d'ailleurs entrer dans plus de détails.

Soit s une substitution d'un groupe donné quelconque, et soit

$$(1) \qquad s = f(x)$$

la formule de s, qui l'exprime en x au moyen d'opérations qu'indique f.

Le groupe qui contient s contient aussi son inverse σ que l'on peut écrire

$$(2) \qquad \sigma = \varphi(x),$$

où φ est obtenue par inversion de f; or de (1) on tire :

$$(3) \qquad x = \varphi(s).$$

Si donc s et σ sont des fonctions uniformes de x, c'est-à-dire si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont uniformes, (1) et (3) font voir que s et x sont fonctions uniformes l'une de l'autre, c'est-à-dire sont liées par une équation du premier degré par rapport à chacune d'elles, ou enfin que s est une fonction linéaire de x, et alors il en est évidemment de même de σ.

Il en résulte que, *si un groupe d'un nombre quelconque, fini ou infini, de substitutions obtenues au moyen de substitutions fondamentales en nombre quelconque, ne contient que des substitutions uniformes, ce groupe est exclusivement composé de substitutions linéaires.*

On peut aussi énoncer ce fait de la manière suivante : *Si un groupe formé d'un nombre quelconque, fini ou infini, de substitutions avec des substitutions fonda-*

mentales en nombre quelconque, n'est pas exclusivement composé de substitutions linéaires, ce groupe contient des substitutions non uniformes.

Les considérations précédentes montrent encore que si l'on veut constituer un nombre fini m de substitutions avec une seule substitution fondamentale $f_1(x)$, cette fonction doit être *algébrique*.

En effet, si $f_1(x)$ était transcendante, uniforme ou non uniforme, son inverse, qui fait partie du groupe, le serait aussi; or de deux fonctions transcendantes inverses l'une de l'autre, l'une au moins a une infinité de valeurs, sinon ces fonctions sont algébriques; toutes ces déterminations devant faire partie du groupe, on voit que le groupe ne peut se composer d'un nombre fini de substitutions si $f_1(x)$ n'est pas algébrique, ainsi que toutes les autres fonctions f_n obtenues par répétition de $f_1(x)$; il est évident d'ailleurs que, si $f_1(x)$ satisfait à cette condition, toutes les autres y satisfont. Si maintenant on considère un groupe d'ordre quelconque p, c'est-à-dire formé au moyen de p substitutions fondamentales

$$f_1, \quad f_1, \quad f_1, \quad \ldots \quad f_1^p,$$

ce groupe contient comme sous-groupe le groupe d'ordre un, formé au moyen d'une seule, f_1 par exemple, des p substitutions fondamentales; or nous venons de démontrer qu'un tel groupe d'ordre un ne peut être composé d'un nombre fini de substitutions que si f_1 est algébrique : il s'ensuit qu'*a fortiori* le groupe d'ordre p considéré *ne peut être composé d'un nombre fini de substitutions que si ses p substitutions fondamentales et, par suite, toutes les autres sont algébriques.*

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante; on connaît trop d'exemples de groupes de substitutions

algébriques en nombre infini pour qu'il soit utile d'insister.

On peut cependant caractériser davantage les groupes d'un nombre fini de substitutions obtenues, soit avec plusieurs substitutions fondamentales, soit avec une seule :

Si

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_n, \quad \ldots, \quad f_m$$

sont les m substitutions algébriques d'un groupe d'ordre quelconque, le produit

$$F(x) = \prod_n f_n(x) \qquad [n = 0, 1, 2, \ldots; f_0(x) = x]$$

reste invariable quand on substitue à x une quelconque des fonctions f_n :

$$F[f_n(x)] = F(x).$$

Or cette fonction est algébrique. Considérons donc une fonction algébrique quelconque, uniforme ou multiforme,

$$y = F(x)$$

dont l'inverse, la fonction x de y, ait $m + 1$ valeurs ; *les fonctions f déterminées par l'équation*

$$F(f) = F(x) \quad (^1)$$

sont les fonctions les plus générales qui forment un groupe de $m + 1$ substitutions (y compris la substitution identique $f_0 = x$). $F(x)$ ne restant assujettie, bien entendu, qu'à ces conditions : 1° d'être algébrique ; 2° d'avoir pour inverse une fonction ayant $m + 1$ valeurs.

---

(1) Le cas où $F(x)$ est rationnelle et de degré $m + 1$ en x n'est qu'un cas particulier auquel ne peuvent se ramener tous les cas possibles des groupes considérés (*loc. cit.*).

Les groupes obtenus ainsi ne sont pas nécessairement du premier ordre. Ceux qui sont du premier ordre forment la solution la plus générale du problème de Babbage :

Déterminer des fonctions itérées en nombre m telles que

$$f_{m+1}(x) = f_m[f_1(x)] = x. \tag{4}$$

A ce sujet il y a lieu de remarquer que, dans la solution qu'en a proposée Babbage, solution reproduite dans quelques Traités d'Analyse [1], entre une fonction *arbitraire,* ce qui serait en contradiction avec nos conclusions.

Si f_1 est une solution particulière de l'équation fonctionnelle précédente, par exemple une substitution linéaire, il forme la fonction

$$\varphi_1(x) = \psi_{-1}\{f_1[\psi_1(x)]\}, \tag{5}$$

où ψ_1 est une fonction *arbitraire,* ce qui donne, en écrivant ψx au lieu de $\psi(x)$,

$$\varphi_2(x) = \psi_{-1} f_1 \psi_1 \psi_{-1} f_1 \psi_1 x. \tag{6}$$

Or, ψ_1 et ψ_{-1} étant inverses l'une de l'autre, il suppose que

$$\psi_1 \psi_{-1} x = x, \tag{7}$$

pour en conclure

$$\varphi_2(x) = \psi_{-1} f_2 \psi_1 x. \tag{8}$$

Mais ceci suppose que $\psi_1 x$ est uniforme (transcendante ou algébrique). En effet, si $\psi_1(x)$ n'est pas uni-

---

[1] LAURENT. *Analyse*, t. VI.

forme, $\psi_1\psi_{-1}x$ ne l'est pas non plus et a plusieurs valeurs ; parmi ces valeurs se trouve x, mais les autres valeurs ne peuvent être x, sinon ψx serait uniforme, et la formule (8) n'est équivalente à la formule (6) qu'autant que ψx est uniforme.

Le but de la formation (5) de φ_1 étant de pouvoir écrire

$$\begin{aligned}
&\varphi_2 x = \psi_{-1} f_2 \psi_1 x,\\
&\varphi_3 x = \psi_{-1} f_3 \psi_1 x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\varphi_{m+1}(x) = \psi_{-1} f_{m+1} \psi_1 (x = \psi_{-1}\psi_1 x = x,
\end{aligned}$$

on doit tout d'abord supposer que $\psi_1(x)$ est uniforme. Mais on peut remarquer en outre que, si $\psi_{-1}x$ n'est pas uniforme et a, par exemple, p valeurs, chacune des fonctions $\varphi_n x$ a p valeurs. La dernière, par exemple, qui est égale à $\psi_{-1}\psi_1 x$, ne se réduit à x que si ψ_{-1} est uniforme. Supposons, par exemple, que ψ_1, qui est uniforme, soit égale à $\sin x$. On aurait

$$\varphi_{m+1}x = \psi_{-1}\psi_1 x = \text{arc}\sin(\sin x) = \begin{cases} x + 2n\pi, \\ (2n+1)\pi - x, \end{cases}$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Si ψ_1 est une fonction rationnelle de degré p en x, ψ_{-1} a p valeurs.

Donc, dans aucun cas, ni ψ_1 ni ψ_{-1} ne peuvent être multiformes, et, par conséquent, ces deux fonctions inverses l'une de l'autre ne peuvent être que *linéaires*. Mais alors les fonctions φ_n sont elles-mêmes *linéaires*. Le procédé de formation des fonctions φ_n par la formule de Babbage, qui n'est valable que pour des fonctions ψ linéaires, ne donne donc rien si l'on se sert de fonctions f_1 linéaires, car on sait trouver directement tous les groupes de m substitutions linéaires. Cependant, si l'on connait une solution f_1 non linéaire

de l'équation (4), la formule (5), où ψ est une fonction linéaire, conduira à d'autres groupes de m substitutions. Mais ce ne seront encore évidemment que des solutions particulières du problème de Babbage.

---

[02]

SUR UNE CLASSE DE COURBES PLANES REMARQUABLES;

PAR M. ERNEST CESÀRO.

Il y a des liaisons simples et nombreuses entre les courbes représentées par l'équation intrinsèque

$$(1) \qquad s = \int \frac{\lambda\, d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\mu} - 1}},$$

λ et μ étant deux constantes, dont la première peut être prise indifféremment avec le signe $+$ ou $-$. Il faut remarquer que, pour $\mu = -2$, l'équation (1) représente une ligne cycloïdale, à savoir la *cycloïde* pour $\pm\lambda = 1$, une *épicycloïde* pour $\lambda^2 > 1$, une *hypocycloïde* pour $\lambda^2 < 1$. En particulier, pour $\pm\lambda = 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, *etc.*, on trouve respectivement l'*épicycloïde à deux rebroussements*, la *cardioïde*, l'*astroïde*, l'*hypocycloïde à trois rebroussements*, etc. Pour $\mu = -1$ la courbe représentée par l'équation (1) est *parallèle à la ligne cycloïdale*, qui correspond à la même valeur de λ. Pour $\mu = 1$ la même équation représente une *alysoïde;* et, en particulier, si $\pm\lambda = \frac{1}{2}$, la *chaînette*. Elle représente aussi, pour $\mu = 2$ et $\pm\lambda = 1$, la *chaînette d'égale résistance;* pour $\mu = 4$ et $\pm\lambda = 3$, la *lemniscate de Bernoulli;* pour $\mu = \frac{2}{3}$ et $\pm\lambda = \frac{1}{4}$, la *parabole;* pour $\mu = \frac{1}{3}$ et

$\pm\lambda = \frac{1}{3}$, l'*hyperbole équilatère*. Enfin, plus généralement, pour $\pm\lambda = \mu - 1$ l'équation (1) représente une *spirale sinusoïde*, pour $\pm\lambda = \frac{1}{2}\mu \gtrless 1$ une *ligne de Ribaucour*, et pour $\pm\lambda = \mu \gtrless 1$ une autre importante famille de courbes, caractérisées par la propriété que leurs circonférences osculatrices, réduites dans un rapport constant autour des points de contact correspondants, au lieu de *passer par un point fixe*, comme dans les spirales sinusoïdes, ou d'être *normales à une même droite*, comme dans les lignes de Ribaucour, sont *tangentes à une droite fixe*. Le cas excepté ($\pm\lambda = 1$, $\mu = 1$) est celui d'une alysoïde particulière $\left(\rho = a + \frac{s^2}{4a}\right)$, lieu des points milieux des rayons de courbure d'une chaînette d'égale résistance.

Prenons comme axes (mobiles) la tangente et la normale en un point quelconque M d'une courbe (1), et partageons le rayon de courbure en M dans un rapport constant par un point M'. On sait [1] que les variations absolues des coordonnées de ce point ($x = 0$, $y = k\rho$) sont données par les formules

$$(2) \qquad \dot{x} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} + 1, \qquad \dot{y} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho},$$

qui deviennent, dans le cas actuel, $\dot{x} = 1 - k$, $\dot{y} = k\frac{d\rho}{ds}$, d'où l'on déduit, pour exprimer l'arc de (M'),

$$\frac{ds'}{ds} = \sqrt{(1-k)^2 - k^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}.$$

D'autre part on a, en vertu de (1),

$$\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\mu} = 1 + \lambda^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2.$$

---

[1] *Geometria intrinseca*, p. 50.

Donc, si l'on attribue à k l'une ou l'autre des valeurs suivantes

$$k_1 = \frac{\lambda}{\lambda + 1}, \qquad k_2 = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

on obtient deux lignes (M_1) et (M_2), dont les arcs sont donnés par les formules

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{\lambda + 1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\mu}{2}}, \qquad \frac{ds_2}{ds} = \frac{1}{\lambda - 1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\mu}{2}},$$

de sorte que

$$(3) \qquad (\lambda + 1)\, s_1 = (\lambda - 1)\, s_2 = \int \frac{\lambda\, d\rho}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-\mu}}}.$$

Comme on a, d'ailleurs, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 2$, on voit que *les deux lignes partagent harmoniquement les rayons de courbure de* (M). En outre le coefficient angulaire de la tangente à (M') est

$$\frac{y'}{x'} = \frac{k}{1 - k}\frac{d\rho}{ds} = \pm \lambda \frac{d\rho}{ds} = \pm \sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\mu} - 1}.$$

Il en résulte que les inclinaisons des tangentes à (M_1) et (M_2) sur la tangente à (M) sont deux angles supplémentaires, φ et $\pi - \varphi$, définis par la formule

$$\cos\varphi = \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-\frac{\mu}{2}}.$$

Donc (M_1) et (M_2) peuvent être considérées comme *les deux branches de l'enveloppe d'une circonférence* Ω, qui joue par rapport à (M) le même rôle que la circonférence directrice pour les lignes cycloïdales, puisque *le centre de courbure de* (M), *en tout point* M, *appartient à la polaire de* M *par rapport à* Ω. Le centre de Ω

est un point M_0, dont les coordonnées

$$(4) \qquad x = -\frac{\lambda^2 \rho}{\lambda^2 - 1}\frac{d\rho}{ds}, \qquad y = \frac{\lambda^2 \rho}{\lambda^2 - 1},$$

sont proportionnelles aux coordonnées du centre de courbure de la développée de (M). Donc ce dernier point se trouve toujours, comme dans le cas ($\mu = -2$) des lignes cycloïdales, sur le diamètre de Ω, qui passe par M.

Ce qu'il y a de remarquable c'est que *les courbes* (M_0), (M_1), (M_2) *appartiennent toutes à la classe définie par l'équation* (1). Remarquons d'abord qu'on a

$$d\varphi = -\frac{1}{\sin\varphi}\, d\left(\frac{\rho}{a}\right)^{-\frac{\mu}{2}} = \frac{\mu \cot\varphi}{2\rho}\, d\rho = \frac{\mu\, ds}{2\lambda\rho},$$

d'où l'on déduit l'angle de contingence de (M') :

$$\frac{ds'}{\rho'} = \frac{ds}{\rho} \pm d\varphi = \left(1 \pm \frac{\mu}{2\lambda}\right)\frac{ds}{\rho}.$$

Les rayons de courbure de (M_1) et (M_2) sont donc

$$\rho_1 = \frac{2\lambda a}{(\lambda - 1)(2\lambda - \mu)}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\mu}{2}+1},$$

$$\rho_2 = \frac{2\lambda a}{(\lambda - 1)(2\lambda - \mu)}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\mu}{2}+1}.$$

On vérifie aisément que *les centres de courbure de* (M_1) *et* (M_2) *sont en ligne droite avec le centre de courbure de* (M). Il suffit de porter les derniers résultats dans les formules (3) pour trouver que (M_1) et (M_2) sont définies, parmi les courbes (1), par les valeurs suivantes des paramètres λ et μ :

$$\lambda_1 = \frac{2\lambda - \mu}{\mu - 2}, \qquad \lambda_2 = \frac{2\lambda - \mu}{\mu - 2}, \qquad \mu_1 = \mu_2 = \frac{2\mu}{\mu - 2}.$$

Quant à (M_0), l'application des formules (2) aux

coordonnées (4) donne

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\mu+2}{\lambda^2-1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\mu}, \qquad \dot{y} = 0.$$

Comme on devait s'y attendre, les tangentes à (M) et (M_0) en deux points correspondants sont parallèles. Il s'ensuit

$$\frac{ds_0}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\mu+2}{\lambda^2-1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\mu}, \qquad \frac{ds_0}{\rho_0} = \frac{ds}{\rho},$$

d'où

$$(5)\qquad \begin{cases} s_0 = \dfrac{\lambda}{2}\dfrac{\mu+2}{\lambda^2-1}\displaystyle\int \frac{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\mu} d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\mu}-1}}, \\ \rho_0 = \dfrac{\mu+2}{\lambda^2-1}\,\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^{\mu+1}. \end{cases}$$

L'expression de s_0 peut être mise sous une forme très simple en remarquant que

$$ds_0 = -\dot{x}\,ds = -dx + \left(\frac{y}{\rho} - 1\right)ds = -dx - \frac{ds}{\lambda^2-1},$$

d'où

$$s = (\lambda^2-1)(s_0 + x).$$

Enfin, par l'élimination de ρ entre les égalités (5), on arrive à voir que, dans la classe (1), la courbe (M_0) est caractérisée par les valeurs suivantes des paramètres λ et μ :

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{\mu+1}, \qquad \mu_0 = \frac{\mu}{\mu+1}.$$

On suppose, bien entendu, que (M) ne soit pas parallèle à une ligne cycloïdale. Dans ce cas ($\mu = -1$) la seconde formule (5) montre immédiatement que (M_0) est une circonférence. Il faut remarquer aussi, dans le cas général, que le rayon de Ω, évidemment égal à

$$R = -\frac{x}{\sin\varphi} = \frac{\lambda}{\lambda^2-1}\frac{\rho}{\cos\varphi} = \frac{\lambda a}{\lambda^2-1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\mu}{2}+1},$$

peut être mis sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$R = \frac{\lambda_1 \rho_1}{\lambda_1 - 1}, \qquad R = \frac{\lambda_2 \rho_2}{\lambda_2 + 1},$$

d'où l'on déduit que (M_0) n'est autre que la ligne (M_2) relative à (M_1), en même temps qu'elle est la ligne (M_1) relative à (M_2). On remarquera, en particulier, que si (M) est une ligne de Ribaucour $(\lambda = \frac{1}{2}\mu)$, il en est de même de (M_0), et que les deux lignes admettent la *droite* (M_2) comme directrice, tandis que pour (M_1) on a $\lambda_1 = \mu_1$. Il en résulte que toute courbe (1), *à paramètres égaux*, peut être considérée comme l'*enveloppe des circonférences décrites des points d'une ligne de Ribaucour comme centres, tangentiellement à la directrice de cette ligne*. On peut aussi la considérer comme le *lieu des conjugués harmoniques, par rapport aux rayons de courbure d'une ligne de Ribaucour, des points de rencontre des normales à cette courbe avec la directrice;* et les centres de courbure des deux lignes, en deux points correspondants, se trouvent toujours sur une perpendiculaire à la directrice. Nous n'insistons pas sur une foule d'autres propriétés, qu'il serait aisé de déduire des formules qui précèdent.

[M²3hβ]

FORMES RÉDUITES D'UNE RELATION TRIPLEMENT LINÉAIRE ENTRE TROIS VARIABLES;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Considérons la relation triplement linéaire

$$(1) \qquad Axyz + B_1 yz + \ldots + C_1 x + \ldots + D = 0.$$

Si l'on suppose

$$AC_i - B_j B_k = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

en posant $x = x' + a$, $y = y' + b$, $z = z' + c$, on peut faire que, dans la relation de même forme qui lie x', y', z', on ait

$$B'_1 C'_1 = B'_2 C'_2 = B'_3 C'_3 = AD';$$

en supposant $D' = 0$ et en supprimant les accents, on a

$$Axyz + B_1 yz + \ldots + AD\left(\frac{x}{B_1} + \ldots\right) + D = 0$$

ou

$$AB_1 B_2 B_3 \frac{x}{B_1} \frac{y}{B^2} \frac{z}{B_3} + B_1 B_2 B_3 \left(\frac{y}{B_2} \frac{z}{B_3} + \ldots\right)$$
$$+ AD\left(\frac{x}{B_1} + \ldots\right) + D = 0.$$

Si l'on pose

$$\frac{\frac{x}{B_1}}{X} = \frac{\frac{y}{B_2}}{Y} = \frac{\frac{z}{B_3}}{Z} = k,$$

on a donc

$$k^3 AB_1 B_2 B_3 XYZ + k^2 B_1 B_2 B_3 (YZ + \ldots)$$
$$+ k AD(X + \ldots) + D = 0.$$

Le rapport des coefficients pris de deux en deux est le même, et l'on peut disposer de k pour que ce rapport ait la valeur $+1$ ou la valeur -1, selon le signe du produit $B_1 B_2 B_3 D$; il suffit de poser

$$\frac{k^2 B_1 B_2 B_3}{D} = \varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1);$$

on a ainsi les formes réduites

$$(2) \qquad \frac{X + Y + Z + \varepsilon XYZ}{1 + \varepsilon(YZ + ZX + XY)} = H.$$

D'ailleurs, ε est le signe du discriminant du premier membre de la relation (1) rendue homogène; on peut le voir en considérant la relation (2).

On peut exprimer X, Y, Z par les formules

$$(3)\quad \varepsilon = -1 \begin{cases} X = \operatorname{tang} u, \quad Y = \operatorname{tang} v, \quad Z = \operatorname{tang} w, \\ u + v + w = \text{const.} = \theta. \end{cases}$$

$$(3')\quad \varepsilon = +1 \begin{cases} X = \operatorname{Th} u, \quad Y = \operatorname{Th} v, \quad Z = \operatorname{Th} w, \\ u + v + w = \text{const.} = \theta. \end{cases}$$

les Th étant des tangentes hyperboliques.

A priori, sauf des conditions d'inégalité et des conditions de réalité qui se trouvent vérifiées d'après ce qui précède, on doit pouvoir exprimer les variables x, y, z de la relation (1) par des formules de la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{x-a}{L} = T(u), \quad \dfrac{y-b}{M} = T(v), \quad \dfrac{z-c}{N} = T(w), \\ u + v + w = \text{const.} = \theta. \end{cases}$$

les T étant des tangentes circulaires ou hyperboliques; on aurait pu craindre toutefois que les relations (1) amenées par les formules (4) ne fussent soumises à une condition invariante : on a vu qu'il n'en est rien.

2. Voici une application : Soit S une surface du troisième ordre ayant trois points doubles A, B, C; nous supposerons, pour plus de simplicité, que ces points sont les points à l'infini sur trois axes de coordonnées Ox, Oy, Oz.

L'équation de la surface est évidemment linéaire par rapport à chacune des variables x, y, z; elle est de la forme (1). Par un transport d'origine et en remplaçant x, y, z par des quantités proportionnelles X, Y, Y, on arrive en général à l'équation (2) ou aux formules (3) et (3'); on pourrait d'ailleurs employer les formules (4). Parmi les cas écartés se trouve le cas où l'on aurait

$$D' = 0, \quad C'_1 = 0, \quad C'_2 = 0, \quad C'_3 = 0;$$

la surface aurait alors un quatrième point double : ce serait la surface corrélative de la surface de Steiner ; le discriminant dont on a parlé serait alors nul.

Cherchons les droites de la surface représentée par l'équation (2). Comme A, B, C sont des points doubles, on a d'abord les droites BC, CA, AB. Une autre droite située sur la surface perce le plan ABC en un point situé sur l'une des droites BC, CA, AB : elle est donc dans un plan parallèle à l'un des plans de coordonnées. Comme un plan $X = X_1$ coupe la surface suivant une conique passant en B et C, si cette conique se compose de deux droites, deux cas sont possibles : l'une des droites passera en B, l'autre passant en C, ou bien l'une des deux droites sera confondue avec BC, le plan $X = X_1$ étant alors tangent à la surface le long de BC. On obtient les droites en question comme il suit :

1° Avec les formules (3′), l'hypothèse $X = \sqrt{\varepsilon} = 1$, ou $\operatorname{Th} u = 1$, ou $u = \infty$, donne v ou w égal à $-\infty$, $\operatorname{Th} v$ ou $\operatorname{Th} w$ égal à -1, c'est-à-dire que la relation entre Y et Z devient

$$(Y + 1)(Z + 1) = 0;$$

avec les formules (3), l'hypothèse $X = \sqrt{\varepsilon} = i$ ou $\operatorname{tang} u = i$ ou $u = i\infty$, donne de même

$$(Y + i)(Z + i) = 0.$$

Si l'on considère alors l'hexaèdre dont les plans de trois faces ont pour équations

$$X = \sqrt{\varepsilon}, \qquad Y = \sqrt{\varepsilon}, \qquad Z = \sqrt{\varepsilon},$$

les plans des trois autres faces ayant pour équations

$$X = -\sqrt{\varepsilon}, \qquad Y = -\sqrt{\varepsilon}, \qquad Z = -\sqrt{\varepsilon},$$

les six droites à distance finie obtenues en coupant le

premier trièdre par le second dessinant sur la surface un contour hexagonal gauche $A'B''C'A''B'C''A'$.

2° Avec les formules (3) ou (3'), l'hypothèse $u = 0$ donne

$$v + w = 0,$$

c'est-à-dire que l'hypothèse $X = H$ donne

$$Y + Z = 0;$$

le plan $X = H$ est donc tangent à la surface le long de BC, et il donne sur la surface une droite située dans le plan des deux droites $B'C''$ et $B''C'$. Chacun des deux plans $Y = H$, $Z = H$ donne de même une droite de la surface.

Un calcul direct, effectué en partant de $X = X_1$, montre que la surface n'a pas d'autres droites. Si l'on compare ce calcul à celui que doit donner la surface générale du troisième ordre contenant les droites BC, CA, AB, on trouve qu'il faut ici compter quatre fois chacune de ces trois droites, deux fois chacune des six droites $A'B''$, ..., et une fois chacune des trois autres droites

$$3 \times 4 + 6 \times 2 + 3 \times 1 = 27.$$

Si l'on effectue le calcul sur l'équation (1), on n'aperçoit pas aussi facilement le contour hexagonal dont il a été question (Cf. *Nouvelles Annales*, p. 141; 1894).

3. M. d'Ocagne a appliqué la méthode nomographique à la relation (1), en traduisant cette relation par l'alignement de trois points, dans le cas où le discriminant est positif ou nul (*Bulletin de la Société Mathématique*, p. 53; 1898). Pour le cas où le discriminant est négatif, les formules (3) donnent une relation graphique assez simple entre les trois variables auxiliaires X, Y, Z.

[O4h]

SUR L'HÉLICOÏDE GÉNÉRAL;

PAR M. l'abbé ISSALY.

On sait que ce nom a été donné au lieu géométrique représenté par le système

$$(1) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = \varphi(r) + a\theta.$$

C'est une surface qui jouit notamment de cette propriété que, à l'aide d'une détermination convenable de la fonction φ, elle devient apte à reproduire toute une série de surfaces *minima* allant de l'hélicoïde gauche, à plan directeur, à l'alysséide de Bour.

Il s'agit de déterminer cette fonction φ par une méthode simple et directe, n'empruntant rien, ni à l'équation de Lagrange y relative, ni à l'intégrale de Monge, ni, par conséquent, à l'emploi si sujet à caution (selon nous) des lignes coordonnées dites *de longueur nulle*.

A cet effet, nous ferons observer d'abord que, d'après notre article inséré dans les *Nouvelles Annales* (p. 56; 1900), la condition caractéristique de toute surface minima peut s'écrire

$$(2) \qquad -q + p' - 2p\cos\Phi = 0.$$

Or si, d'autre part, on met le carré de l'élément linéaire sous la forme appropriée

$$dS^2 = A^2\,du^2 + A'^2\,du'^2 + 2B''\,du\,du',$$

laquelle, remarquons-le, entraîne $\cos\Phi = \frac{B''}{AA'}$, on éta-

blira sans difficulté les relations de proportionnalité suivantes :

$$\frac{-q}{\frac{A'}{A}D} = \frac{p'}{\frac{A}{A'}D'} = \frac{p}{D''},$$

les déterminants bien connus D, D′, D″ correspondant (nous permutons les *accents* dans leur notation habituelle) aux dérivées respectives $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u'^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial u'}$.

Il s'ensuit que la condition (2) peut aussi s'écrire

$$(2') \qquad A'^2 D + A^2 D' - 2B''D'' = 0.$$

Ceci posé, revenons à notre hélicoïde. On déduit immédiatement de ses équations, dans l'hypothèse de $u = 0$, $u' = r$:

$$A^2 = r^2 + a^2, \qquad A'^2 = 1 + \varphi'^2, \qquad B'' = a\varphi',$$
$$D = -r^2\varphi', \qquad D' = -r\varphi'', \qquad D'' = a.$$

Portant ces valeurs dans (2′), on arrive à l'équation différentielle

$$(3) \qquad r(r^2 + a^2)\varphi'' + (r^2 + 2a^2)\varphi' + r^2\varphi'^3 = 0,$$

équation qu'il s'agit d'intégrer. Pour cela nous posons d'abord

$$z - a\theta = \zeta = \varphi(r),$$

et, conséquemment,

$$r = f(\zeta), \qquad \varphi'(r) = \frac{1}{f'(\zeta)}, \qquad \varphi''(r) = -\frac{f''(\zeta)}{f'^3(\zeta)};$$

ce qui nous permet de donner à l'équation (3) la forme, tout autrement avantageuse,

$$r(r^2 + a^2)f'' - (r^2 + 2a^2)f'^2 - r^2 = 0,$$

voire celle-ci

$$(3') \qquad r(r^2 + a^2)\frac{d^2 r}{d\zeta^2} - (r^2 + 2a^2)\frac{dr^2}{d\zeta^2} - r^2 = 0.$$

Faisons maintenant $\frac{dr}{d\zeta} = v$ et, par là même, $\frac{d^2 r}{d\zeta^2} = \frac{dv}{dr} v$; il viendra

$$dv - \frac{r^2 + 2a^2}{r(r^2 + a^2)} v\, dr - \frac{r\, dr}{v(r^2 + a^2)} = 0.$$

C'est une *équation de Bernoulli*. On la transforme en une équation *linéaire* en y posant $v^2 = w$. Elle devient ainsi

$$(3'') \qquad dw - \frac{2(r^2 + 2a^2)}{r(r^2 + a^2)} w\, dr - \frac{2r\, dr}{r^2 + a^2} = 0.$$

Intégrant et désignant par m^2 la constante, on en conclut

$$w = v^2 = \frac{dr^2}{dz^2} = \frac{r^2(r^2 - m^2)}{m^2(r^2 + a^2)};$$

d'où

$$\zeta = m \int \frac{\sqrt{r^2 + r^2}}{r\sqrt{r^2 - m^2}}\, dr.$$

Pour achever le calcul, multiplions haut et bas par $\sqrt{r^2 + a^2}$; nous aurons

$$\zeta = z - a\theta = m \int \frac{r\, dr}{\sqrt{(r^2 + a^2)(r^2 - m^2)}}$$
$$- ma^2 \int \frac{dr}{r\sqrt{(r^2 + a^2)(r^2 - m^2)}}.$$

Or si, après avoir posé $\rho = r^2$ dans la première intégrale et $\frac{1}{\rho_1} = r$ dans la seconde, on fait respectivement dans chacune

$$\sqrt{(\rho + a^2)(\rho - m^2)} = (\rho + a^2)t,$$
$$\sqrt{(1 + a^2\rho_1)(1 - m^2\rho_1)} = (1 - m^2\rho_1)t_1,$$

on trouvera enfin

$$z = m \log \frac{\sqrt{r^2 - a^2} - \sqrt{r^2 - m^2}}{m}$$
$$- a \operatorname{arc\,tang} \frac{m}{a} \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{\sqrt{r^2 - m^2}} - a\theta + C.$$

C'est la fonction qu'il s'agissait de définir. Elle coïncide (au signe près du deuxième terme) avec celle donnée, pour la première fois, par Scherk. On constate d'ailleurs qu'elle reproduit bien, pour $m = 0$, l'hélicoïde gauche et, pour $a = 0$, l'alysséide, ainsi que nous l'avions annoncé dès le début.

[L¹5b]

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE PROPRIÉTÉ DES NORMALES A UNE CONIQUE A CENTRE;

PAR M. A. VACQUANT.

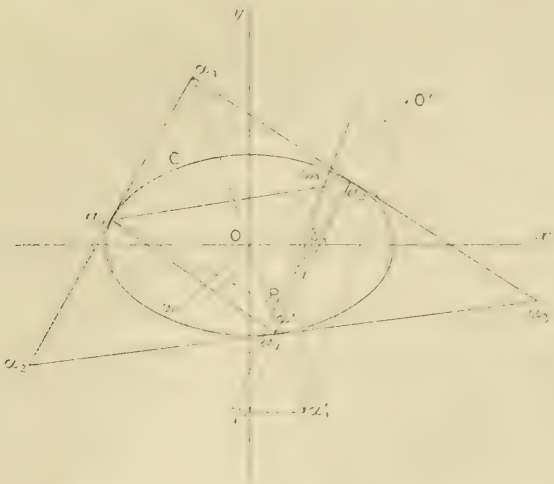
I. THÉORÈME. — *Si un point décrit une normale en* ω_1 *à une conique* C, *les pieds des trois autres normales menées de ce point à* C *sont les sommets d'un triangle dont les pôles des côtés, par rapport à* C, *sont sur une hyperbole équilatère* H *passant par le centre de* C, *ayant ses asymptotes parallèles aux axes de* C *et son centre au point* ω *de* C *diamétralement opposé à* ω_1.

Cette propriété est connue; par exemple, elle est indiquée, en partie, sous sa forme corrélative dans l'Ouvrage de M. E. Duporcq (*Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 70); on la rencontre aussi dans un article de Neuberg (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI).

On peut démontrer très simplement cette proposition en se servant de la relation qui existe entre les pôles de deux cordes d'une conique telles que les normales aux extrémités de ces cordes concourent, savoir : *le pôle de l'une des cordes est le centre de l'autre*, en appe-

lant, avec Laguerre, *centre* d'une droite par rapport à des axes de coordonnées rectangulaires le point dont les projections sur les axes sont symétriques, relativement à l'origine, des points où les axes sont rencontrés par la droite ; celle-ci sera la *centrale* du point.

Soient P un point de la normale en ω_1 à la conique C et a_1, a_2, a_3 les pieds des trois autres normales à C menées par P. La corde $\omega_1 a_1$ rencontre les axes Ox, Oy



de C en β_1 et γ_1 ; le point α'_1 qui se projette en β_1 et γ_1 sur Ox et Oy est le symétrique par rapport à O du pôle α_1 de la corde $a_2 a_3$. Dans le rectangle $O\beta_1\alpha'_1\gamma_1$ les diagonales $O\alpha'_1$, $\beta_1\gamma_1$ se coupent en leur milieu α' et sont également inclinées sur Ox et Oy. Soit O' le symétrique de O par rapport à ω_1 ; la droite $O'\alpha'_1$, parallèle à $\omega_1\alpha'$, et la droite $O\alpha'_1$ étant également inclinées sur Ox, Oy, forment deux faisceaux homographiques ; les rayons homologues et parallèles de ces faisceaux sont parallèles à Ox et Oy ; donc le lieu de α'_1 est une hyperbole équilatère passant en O et O', de centre ω_1.

Le lieu de α_1, symétrique de α'_1 par rapport à O, est une hyperbole équilatère H, passant en O, de centre ω diamétralement opposé à ω_1 sur C, ayant ses asymptotes parallèles aux axes de C.

On remarquera qu'il existe une infinité de triangles tels que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ inscrits à H et circonscrits à C; les normales aux points de contact a_1, a_2, a_3 des côtés d'un triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ avec C concourent en un point situé sur la normale en ω_1 à C.

Réciproquement, si une hyperbole équilatère H *a son centre en un point* ω *d'une conique* C *et ses asymptotes parallèles aux axes de* C, *on peut lui inscrire une infinité de triangles qui soient en même temps circonscrits à* C. *Les normales aux points de contact des côtés de l'un de ces triangles concourent en un même point; le lieu de ce point est la normale menée à* C *au point* ω_1 *diamétralement opposé à* ω.

En effet, si l'on considère la normale en ω_1 à C et un point P de cette normale, les tangentes à C aux pieds a_1, a_2, a_3 des trois autres normales menées à C par P se coupent deux à deux en des points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ situés sur une hyperbole équilatère H′ passant en O, de centre ω, d'asymptotes parallèles à Ox, Oy. Donc H′ est identique à H.

II. Théorème. — *Le triangle* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ *inscrit à* H *et circonscrit à* C *est aussi inscrit à une conique* C_1 *coaxiale à* C.

En effet, le triangle $Ox_\infty y_\infty$, ayant pour sommets O et les points à l'infini sur les axes Ox, Oy, et le triangle $a_1a_2a_3$ sont inscrits dans l'hyperbole d'Apollonius $\omega_1 a_1 a_3 a_3$; donc ces triangles sont conjugués par rap-

port à une conique Γ qui aura dès lors pour axes Ox, Oy. Si l'on prend la polaire réciproque de C par rapport à Γ, on a une conique C′ coaxiale à C et inscrite dans $a_1 a_2 a_3$; la polaire réciproque de C′ par rapport à C est une conique C_1, coaxiale à C et passant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Les normales en a_1, a_2, a_3 à C concourent en P et les normales en α_1, α_2, α_3 à C_1 concourent en un point P_1 de l'hyperbole équilatère H qui est une hyperbole d'Apollonius pour la conique C_1.

Réciproquement, étant données deux coniques coaxiales C_1 *et* C *telles qu'il existe un triangle* $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ *inscrit à* C_1 *et circonscrit à* C, *les normales à* C_1 *en* $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ *concourent; il en est de même des normales à* C *aux points de contact* α_1, α_2, α_3 *de* C *avec les côtés du triangle* $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$. *Le centre de l'hyperbole d'Apollonius* $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ *est sur* C.

En effet, il existe une infinité de triangles $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ inscrits à C_1 et circonscrits à C; soient T et T′ deux de ces triangles, il existe une conique Γ conjuguée à la fois aux triangles T et T′; il est clair que si l'on prend la polaire réciproque de C_1 par rapport à Γ on obtient la conique C; d'ailleurs le triangle $Ox_\infty y_\infty$ conjugué à la fois par rapport aux coniques C et C_1 sera conjugué par rapport à Γ; les triangles $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ et $Ox_\infty y_\infty$ conjugués à Γ ont leurs sommets sur une conique qui est une hyperbole d'Apollonius relative à C_1; donc les normales C_1 aux points $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ concourent (E. Duporc, *loc. cit.*, n° 101).

Si C′ est la polaire réciproque de C_1 par rapport à C, le triangle $a_1 a_2 a_3$ est inscrit à C et circonscrit à C′. Comme C et C′ sont coaxiales, les normales a_1, a_2, a_3 à C concourent, d'après ce qui précède, en un certain point P; de plus, l'hyperbole d'Apollonius $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ a

son centre sur C au point ω diamétralement opposé au pied ω_1 de la quatrième normale menée à C par P; car si P décrit la normale en ω_1 à C, les points α_1, α_2, α_3 décrivent une hyperbole équilatère passant en O, x_∞, y_∞, de centre ω, coïncidant avec l'hyperbole d'Apollonius $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ relative à la conique C_1.

[P]

SUR LA TRANSFORMATION, POINT PAR POINT, DES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. V. JAMET.

Étant donnée une courbe algébrique (C) dont tous les points multiples sont à tangentes distinctes, nous nous proposons de montrer comment on peut lui faire correspondre, point par point, une autre courbe algébrique dont tout point multiple est un point double (à tangentes distinctes ou confondues) en n'employant d'autres transformations que les suivantes :

1° Par rayons vecteurs réciproques;

2° Par polaires réciproques;

3° Par voie d'homographie.

A cet effet, nous rappelons que M. Zeuthen (*N. A.*, 2e série, t. V; 1866) a montré comment on peut calculer le nombre des points d'où l'on peut mener à (C) trois normales égales, ainsi que le nombre des points, situés sur la développée de (C), d'où l'on peut mener à celle-ci une normale égale au rayon de courbure qui y touche la développée; cela revenait évidemment à chercher le nombre des cercles *tritangents* à (C), et aussi le nombre des cercles qui, étant bitangents à (C), ont,

en un de leurs points de contact, un contact d'ordre supérieur au premier avec (C). Pour nous, l'essentiel est de savoir que, si (C) est algébrique, le nombre de ces cercles est fini. Enfin, les cercles qui ont avec (C) un contact du troisième ordre au moins sont en nombre fini.

Cela posé, transformons (C) par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle d'inversion un point qui ne soit situé sur aucune des circonférences que nous venons d'énumérer. Nous obtenons une première transformée (S) dont toute tangente singulière n'ayant pas son point de contact au pôle est, ou une tangente d'inflexion, ou une tangente double; les tangentes d'inflexion répondent aux cercles osculateurs à (C), menés par le pôle de transformation; les tangentes doubles aux cercles bitangents à (C) passant également par le pôle.

Supposons encore, chose toujours possible, qu'on ait préalablement fait subir à la courbe (C) une transformation homographique permettant de supposer que tous ses points à l'infini sont distincts; le pôle de transformation P sera, sur (S), un point multiple à tangentes distinctes.

Transformons encore (S) par la méthode des polaires réciproques; la transformée (T) n'aura pour points multiples que des points répondant à des tangentes singulières de (S) dont les points de contact sont, ou des points distincts, ou des points d'inflexion. Or, outre les tangentes au point P, la courbe (S) n'a pour tangentes multiples que des tangentes doubles, et à chacune d'elles répond un point double de (T); de plus, à chaque tangente d'inflexion de (S) répond un point de rebroussement de (T), et si (T) a d'autres points multiples, ils ne peuvent provenir que de la singularité présentée

par (S) au point P. Mais ce point se transforme en une tangente multiple à points de contact distincts, et chacun d'eux est un point ordinaire de (T). Celle-ci remplit donc toutes les conditions du problème.

[A4a]

NOTE SUR LES GROUPES FINIS;

PAR M. MICHAEL BAUER, à Budapest.

---

1. Soit $\mathfrak{h}$ un groupe d'ordre p^α et soient

$$(1) \qquad \mathfrak{h}_1, \quad \mathfrak{h}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{h}_r$$

ses sous-groupes $p^{\alpha-1}$. Il est connu que

$$r \equiv 1 \qquad (\bmod p).$$

Je démontrerai que, plus précisément,

$$r = \frac{p^{\alpha-\gamma}-1}{p-1} \qquad (0 \leqq \gamma \leqq \alpha - 1).$$

Désignons le plus grand commun diviseur des groupes (1) par $\mathfrak{d}$, comme dans une Note antérieure ([1]). Alors r est le nombre des sous-groupes

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{d}}, \quad \frac{\mathfrak{h}_2}{\mathfrak{d}}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathfrak{h}_r}{\mathfrak{d}}$$

qui sont les sous-groupes de l'index p du groupe $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}}$. Or $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}}$ est un groupe des opérations échangeables dont toutes les opérations différentes de l'unité sont d'ordre p. Puisque l'ordre du groupe $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}}$ est $p^{\alpha-\gamma}$, nous trouvons,

---

([1]) *Note sur les groupes d'ordre p^α.*

d'après M. Zsigmondy [1], la relation

$$r = \frac{p^{\alpha-\gamma}-1}{p-1}. \tag{3}$$

Cette relation suit de la formule (2), p. 207, du Mémoire cité, si nous y substituons

$$\left\{\begin{array}{lll} & \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 1, & \\ & s = \alpha - \gamma, & t = 1, \\ \gamma_1 = 1, & m_1 = s - 1, & h_1 = s, \end{array}\right. \tag{4}$$

2. Soit $\mathfrak{h}$ un groupe d'ordre

$$n = p^\alpha m, \qquad (m, p) = 1.$$

Si le groupe $\mathfrak{h}$ a des sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$, alors leur nombre est $\frac{p^{\alpha-\gamma}-1}{p-1}$.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que l'ordre du plus grand commun diviseur des sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$ est divisible par m.

[A4a]

NOTE SUR LES GROUPES D'ORDRE p^α;

PAR M. MICHEL BAUER, à Budapest.

Soit $\mathfrak{h}$ un groupe d'ordre p^α, p étant un nombre premier. Soient les sous-groupes d'ordre $p^{\alpha-1}$

$$\mathfrak{h}_1, \quad \mathfrak{h}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{h}_r; \tag{1}$$

---

[1] *Beiträge zur Theorie Abel'scher, etc.* (*Monatshefte f. Math. u. Phys.*, Bd VII).

si nous désignons le plus grand commun diviseur des sous-groupes (s) par $\mathfrak{d}$, nous pouvons démontrer les théorèmes suivants :

I. *Le groupe $\mathfrak{d}$ est différent de l'unité, excepté le cas où $\mathfrak{h}$ est un groupe des opérations échangeables dont toutes les opérations outre l'unité sont d'ordre p.*

II. *Le groupe $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}}$ est toujours un groupe des opérations échangeables dont toutes les opérations différentes de l'unité sont d'ordre p.*

1. Le groupe $\mathfrak{h}$ n'est pas un groupe des opérations échangeables, c'est-à-dire le groupe des commutateurs (*Commutator-Gruppe*) appartenant à $\mathfrak{h}$ est différent de l'unité [1]. Puisque les sous-groupes $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}_i}$ sont d'ordre p et, par conséquent, leurs opérations échangeables, tous les sous-groupes $\mathfrak{h}_i$ contiennent le groupe des commutateurs.

2. Le groupe $\mathfrak{h}$ contient des opérations d'ordre $p^\beta (\beta > 1)$. Soit $\mathfrak{A}$ une telle opération ; ses puissances forment un groupe circulaire dont l'ordre est p^β. Le groupe $\mathfrak{A}$ a un seul sous-groupe d'ordre $p^{\beta-1}$, que nous désignons par $\mathfrak{B}$. Or $\mathfrak{B}$ est contenu comme sous-groupe dans tous les groupes $\mathfrak{h}_i$. Car il est possible que $\mathfrak{h}_i$ contienne $\mathfrak{A}$ et par conséquent $\mathfrak{B}$. Sinon le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{h}_i$ avec $\mathfrak{A}$ est un sous-groupe d'ordre $p^{\beta-1}$, et celui-ci ne peut être que $\mathfrak{B}$.

---

[1] Frobenius, *Ueber die Primfactoren der Gruppen determinante* (*Berliner Sitzungsberichte*, p. 1343; 1896).

3. Les opérations du groupe $\mathfrak{h}$ sont échangeables, et toutes les opérations différentes de l'unité sont d'ordre p. En ce cas, nous verrons que $\mathfrak{d}$ se réduit à l'unité. Soit une base du groupe $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{b}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{b}_\alpha,$$

$$\mathfrak{b}_1^p = \mathfrak{b}_2^p = \ldots = \mathfrak{b}_\alpha^p.$$

Si $\mathfrak{B}$ est une opération quelconque différente de l'unité, on peut construire un sous-groupe d'ordre $p^{\alpha-1}$ qui ne contient pas $\mathfrak{B}$. Par exemple, soit

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{b}_1^{r_1} \mathfrak{b}_2^{r_2} \ldots \mathfrak{b}_\alpha^{r_\alpha}$$

et

$$(r_1, p) = 1;$$

alors le groupe minimum des opérations

$$(\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \ldots, \mathfrak{b}_\alpha)$$

est un sous-groupe d'ordre $p^{\beta-1}$ qui ne contient pas $\mathfrak{B}$.

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{d}}, \quad \frac{\mathfrak{h}_2}{\mathfrak{d}}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathfrak{h}_p}{\mathfrak{d}}.$$

4. Soit le groupe $\mathfrak{d}$ d'ordre p^γ; alors les sous-groupes sont les mêmes que les sous-groupes d'ordre $p^{\alpha-\gamma-1}$ du groupe $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}}$ dont l'ordre est $p^{\alpha-\gamma}$. Or il suit de la définition de $\mathfrak{d}$ que, outre l'unité, les groupes (2) n'ont pas des opérations communes, et ainsi $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}}$ est un groupe des opérations échangeables dont toutes les opérations différentes de l'unité sont d'ordre p.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1900. — COMPOSITIONS.

Caen.

ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES.

I. *Trouver la surface* S *lieu des points équidistants d'un plan* P *et d'un point* F *donné à une distance* p *de* P *et montrer que ses sections planes se projettent sur* P *suivant des cercles. Aire de la partie de* S *comprise entre le sommet et le parallèle dont le plan passe par* F.

Montrer que les lignes tracées sur S *de telle sorte que leurs tangentes fassent un même angle* α *avec* P *se projettent orthogonalement sur ce plan suivant des développantes de cercle.*

L'aire demandée est $\frac{2}{3}\pi(\sqrt{8}-1)^2_p$. Les projections des courbes proposées ont une équation de la forme $r\frac{dr}{ds} = p \operatorname{tang}\alpha$: leurs tangentes sont à une distance constante, $p \operatorname{tang}\alpha$, du pôle.

II. *Deux points pesants,* M, *de masse* 1, M', *de masse* 3, *s'attirent avec une intensité* $3\omega^2\overline{MM'}$; M' *peut se mouvoir librement,* M *est assujetti à glisser sans frottement sur une verticale fixe; les vitesses initiales sont nulles. Mouvement des deux points; mouvement de* M' *relativement à des axes de directions fixes menés par* M.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Quand une étoile, d'ascension droite* A, *se lève à l'horizon d'un lieu dont la latitude est* λ, *son azimut est* α; *calculer, pour cet instant, l'angle horaire de l'étoile,* H, *et l'heure sidérale* T.

Cas de $A = 9^h 17' 12''$, $\lambda = 48^\circ 41' 3''$, $\alpha = 225^\circ$.

$$\cot H = \sin\lambda \cot\alpha, \qquad H = 233^\circ 5' 56'', \qquad T = 16^h 9^m 36^s.$$

MÉCANIQUE.

I. *Une parabole* P *roule sur une parabole égale* Q, *fixe, de manière que les deux courbes soient toujours symétriques par rapport à la tangente au point de contact* M. *Lieu décrit par le foyer de* P. *Déterminer, pour une position de la figure mobile :* 1° *la circonférence des inflexions;* 2° *le rayon de courbure de* P *et de* Q *en* M; 3° *le point* E *où l'axe de* P *touche son enveloppe et le rayon de courbure* ρ *de cette enveloppe au point* E; 4° ρ *est de la forme*

$$p\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha(1+2\sin^2\frac{1}{2}\alpha)}{2\sin^4\frac{1}{2}\alpha}.$$

II. *Une barre très mince, homogène, pesante, de longueur* $2a$, *a l'une de ses extrémités* A *assujettie à rester sur l'axe* OZ, *qui est vertical, l'autre extrémité* B *sur la surface de l'ellipsoïde de révolution*

$$\frac{x^2+y^2}{4a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1;$$

il n'y a pas de frottement. A l'instant initial, la barre située dans l'intérieur de l'ellipsoïde a son extrémité supérieure A *immobile, elle-même tournant autour de* OZ *avec une vitesse* ω *et inclinée de* 45° *sur l'horizon.*

Mouvement de la barre; réactions exercées sur les points A *et* B.

Le centre de gravité G reste dans le plan OXY;

$$OG = a \sin\theta;$$

$$\psi' \sin^2\theta = \frac{\omega}{2}, \qquad (\cos^2\theta + \tfrac{1}{3})\theta'^2 + \tfrac{4}{3}\psi'^2 \sin^2\theta = \tfrac{2}{3}\omega^2.$$

La réaction en A, paralèlle à GO, est

$$\tfrac{9}{2}\tang\theta + \frac{5a\omega^2 \sin\theta}{2(4 - 3\sin^2\theta)^2};$$

la réaction en B est

$$g\frac{\sqrt{4 - 3\sin^2\theta}}{2\cos\theta}.$$

Toulouse.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Intégration de l'équation aux différentielles totales*

$$X\,dx + Y\,dy + X\,dz = 0,$$

où X, Y, Z *désignent des fonctions données variables* x, y, z.

II. *Déterminons la valeur de l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx.$$

III. *On considère la surface définie par les formules*

$$x = \frac{a}{4}\cos u \cos v,$$

$$y = \frac{a}{4}\cos u \sin v,$$

$$z = a\left(1 - \cos\frac{u}{2} + \sin\frac{u}{2}\right),$$

où a est donné, et qui déterminent, en fonction de deux paramètres u et v, les coordonnées x, y, z d'un de ses points par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.

Déterminer sur cette surface les courbes dont les normales principales rencontrent constamment l'axe Oz *et établir que ces courbes sont algébriques.*

Épreuve pratique. — *Construire la courbe ayant pour équation*

$$\theta = \int \frac{(10r - 9)\,dr}{r\sqrt{r^5 - 100r^2 + 180r - 81}}$$

et passant par le point

$$(\theta = 0,\ r = -5 + \sqrt{34}).$$

Nota. — On remarquera que la quantité sous le radical s'annule pour certaines valeurs entières de r.

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — I. *Une surface de révolution est engendrée par la courbe*

$$x^2 y = a^3 \qquad (a \text{ constant})$$

tournant autour de l'axe des y qui est vertical et tourné vers le bas, dans le sens de la pesanteur.

Etudier le mouvement d'un point pesant sur cette surface et indiquer les conditions initiales qui doivent être satisfaites pour que la trajectoire coupe les méridiens sous un angle constant.

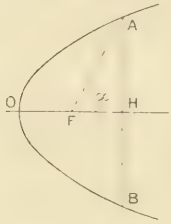
Réaction de la surface.

II. *Exposer très sommairement la méthode géométrique de Poinsot pour étudier le mouvement d'un*

corps solide qui est assujetti à tourner autour d'un point fixe et qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure.

Épreuve pratique. — *Calculer l'attraction newtonienne d'un solide homogène limité par un parabo-*

Fig. 1.



loïde de révolution et par un plan perpendiculaire à l'axe sur un point matériel situé au foyer de la parabole génératrice.

Soit AB *la trace du plan sécant qui limite le segment.*

On donne le paramètre p *de la parabole génératrice, l'angle* AFH $= \alpha$, *la densité* ρ *du paraboloïde, le coefficient* μ *d'attraction.*

Pour quelle valeur de l'angle α *l'attraction du segment sur le foyer est-elle nulle?*

Mécanique appliquée.

Épreuve écrite. — I. *Les circonférences primitives* O *et* O' *de deux engrenages plans tournent autour de leurs centres respectifs avec des vitesses angulaires constantes, et leur point de contact* I, *considéré comme appartenant à l'une ou à l'autre, a même vitesse* V. *Un point* M *se meut d'une façon quelconque et l'on désigne par* Γ *sa trajectoire absolue, par* v *sa*

vitesse absolue et par γ et γ' ses trajectoires relatives dans les plans des deux cercles O *et* O'.

1° *Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que γ et γ' soient des profils conjugués est que les deux segments* V *et* v *aient toujours des projections égales sur la droite* TM.

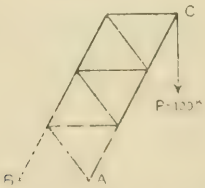
On peut se donner arbitrairement la trajectoire Γ. *Quelle tranformation subissent les deux profils γ et γ' quand on remplace* Γ *par une de ses conchoïdes par rapport au point* I?

2° *Déterminer la nature géométrique des profils γ et γ' quand la courbe* Γ *est une droite passant par* I *et quand cette courbe est le cercle décrit sur* IO *comme diamètre.*

II. *Recherche générale des systèmes articulés plans dont on peut déterminer toutes les tensions par la statique.*

Épreuve pratique. — *On considère le système articulé ci-dessous formé de triangles équilatéraux; les*

Fig. 2.



deux points A *et* B *sont fixés de façon que* AB *soit horizontale et égale à la longueur commune de toutes les tiges.*

Déterminer les tensions et réactions produites par le poids propre du système et par une charge de 100^{kg} *appliquée en* C.

Poids de chaque barre, 10^{kg}.

On construira le diagramme en adoptant comme échelle des forces 1^{cm} *par* 10^{kg}.

Astronomie ou mécanique céleste.

Épreuve écrite. — *Aberration des astres fixes.*

Établir les formules qui donnent les changements apportés par l'aberration à l'ascension droite et à la déclinaison d'une étoile. Aberration annuelle.

On admettra, sans les démontrer, les formules suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt} - \frac{n}{\cos\varphi}(\quad \sin\odot - \sin\varphi\cos\varpi),$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dY}{dt} - \frac{n}{\cos\varphi}(-\cos\odot - \sin\varphi\cos\varpi)\cos\varepsilon,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dZ}{dt} - \frac{n}{\cos\varphi}(-\cos\odot - \sin\varphi\cos\varpi)\sin\varepsilon.$$

Dans ces formules, x, y, z *désignent les coordonnées rectangulaires équatoriales de l'observateur* (Ox *passant par le point vernal*), X, Y, Z *celles du centre du Soleil,* n, φ, $\odot$, ϖ *et* ε *le moyen mouvement diurne, l'angle d'excentricité, la longitude du périgée et l'inclinaison de l'orbite du Soleil sur l'équateur.* (*L'angle d'excentricité est l'angle dont le sinus est égal à l'excentricité.*)

Épreuve pratique. — *La durée de la révolution de la planète Junon autour du Soleil est de* $1591^{j},988$; *l'excentricité de son orbite est* 0,25786. *Calculer, avec la précision que comportent les données, le temps qui s'écoule depuis son passage au périhélie jusqu'au moment où son rayon vecteur est perpendiculaire au grand axe.*

Géométrie supérieure.

Épreuve écrite. — I. *Démontrer que, si des courbes planes formant une congruence sont normales à toute une famille de surfaces, elles conservent cette propriété lorsqu'elles sont entraînées dans la déformation de la surface enveloppe de leurs plans.*

Cas particulier où les courbes considérées sont des cercles.

II. *On considère une congruence de cercles. Une sphère* S *passant par un cercle* C *de la congruence est, en général, tangente en deux points* M, M′ *de ce cercle à une surface* Σ *de la congruence passant par* C.

Lorsque la sphère S *varie, en passant par* C, *la droite* MM′ *passe constamment par un point* P *du plan du cercle* C; *lorsque, au contraire,* S *restant fixe,* Σ *varie en passant par* C, *la droite* MM′ *passe constamment par un point* Q.

1° *Démontrer que, si la surface* Σ *varie,* C *restant fixe, le point* P *décrit une conique, et que si la sphère* S *varie,* C *restant fixe, le point* Q *décrit la même conique.*

2° *Établir que cette conique coupe* C *en ses points focaux et que ses asymptotes sont perpendiculaires aux plans focaux de l'axe du cercle* C *relativement à la congruence engendrée par cette droite.*

3° *Examiner le cas où cette conique est un cercle.*

Épreuve pratique. — *On considère la surface* S *lieu des points dont les coordonnées rectangulaires* X, Y, Z *sont définies par les équations*

$$X = 3u + 3uv^2 - u^3,$$
$$Y = 3v + 3u^2v - v^3,$$
$$Z = 3u^2 - 3v^2.$$

dans lesquelles u et v désignent des variables indépendantes.

Un trièdre trirectangle $Mxyz$ se meut de manière que dans chacune de ses positions l'arête Mz soit normale en M à la surface S et l'arête Mx tangente à la courbe (v) de S qui passe au sommet M.

Exprimer en fonction de u et v les différentes quantités ξ, η, ξ_1, η_1, p, q, r, p_1, q_1, r_1 qui figurent dans les formules relatives au trièdre mobile.

Former pour la surface S et pour chacune des nappes de sa développée l'équation des lignes de courbure, celle des lignes asymptotiques et celle qui détermine les rayons de courbure principaux.

Marseille.

Analyse infinitésimale.

1° *Démontrer que les trajectoires orthogonales des génératrices d'une surface développable peuvent être considérées comme les développantes de l'arête de rebroussement de cette surface, ou comme les lignes de courbure de l'un des systèmes;*

2° *Un plan mobile P ayant, en coordonnées rectangulaires, une équation de la forme*

$$P = ax + by + cz + d = 0,$$

où a, b, c, d sont des fonctions d'une variable indépendante t, on considère la surface développable S enveloppe du plan P.

A. *Trouver les équations de la génératrice mobile G de la surface S.*

B. *Trouver les équations de l'arête de rebroussement de la surface S.*

C. *Déterminer les trajectoires orthogonales des gé-*

nératrices caractéristiques G *sur la surface* S. *Montrer que le problème dépend d'une équation différentielle linéaire entre* z *et* t.

3° *Intégrer cette équation dans le cas où l'on a*

$$P = 2tx - (t^2 - 1)y + (t^2 + 1)z + \sin t = 0,$$

et donner la signification géométrique du résultat.

SOLUTION.

En écrivant que le déplacement élémentaire sur la génératrice et le déplacement élémentaire de la forme la plus générale sont rectangulaires, on arrive à l'équation linéaire en z et t

$$\begin{vmatrix} a & b & c\,dz \\ a' & b' & c'\,dz + (a''x + b''y + c''z + d'')\,dt \\ bc' - cb' & ca' - ac' & (ab' - ba')\,dz \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation se réduit à $dz = 0$, si l'on a

$$a(ca' - ac') - b(bc' - cb') = 0.$$

Cette condition peut s'intégrer. Elle est satisfaite par

$$c^2 = K(a^2 + b^2),$$

K étant une constante arbitraire.

On a $K = 1$ dans l'exemple de calcul choisi.

Les lignes $z =$ const. sont les lignes de niveau quand le plan des xy est pris pour plan horizontal.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère tous les points de contact où le plan tangent est également incliné sur l'axe* Oz *de la surface*

$$2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Déterminer, pour une inclinaison donnée, l'aire limitée sur la surface par le lieu de ces points.

Solution.

La courbe limite est déterminée en projection sur le plan des xy par l'équation

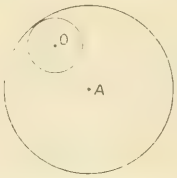
$$1 + \rho^2\left(\frac{\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\sin^2\omega}{b^2}\right) = K^2,$$

et l'on a pour l'aire

$$A = \frac{2\pi}{3} a^2 b^2 (K^3 - 1).$$

Mécanique.

Dans un plan vertical est fixé un disque circulaire O. *Ce disque* O *est à l'intérieur d'un cerceau* A *qui*



s'appuie sur le disque. A l'origine des temps, ce cerceau, qui est pesant et homogène, est sans vitesse, et la ligne qui joint le centre du disque au centre du cerceau fait un angle de 45° avec la verticale.

On abandonne le cerceau à lui-même, et l'on demande de trouver le mouvement.

1° *En supposant qu'il n'y a pas de frottement;*

2° *En supposant le frottement assez grand pour qu'il y ait roulement sans glissement.*

Comparer la durée des oscillations dans les deux cas.

Examiner le cas particulier où le disque est réduit à un point.

SOLUTION.

Soient R le rayon du cerceau, r le rayon du disque, M la masse du cerceau, θ l'angle de OA avec la verticale descendante, φ l'angle d'un rayon fixe dans le cerceau avec la même verticale; on a d'abord

$$M(R-r)\theta'' = -Mg\sin\theta + T,$$
$$M(R-r)\theta'^2 = -Mg\cos\theta + N.$$

En appliquant le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe passant au centre A, on a

$$MR\varphi'' = -T.$$

Supposons d'abord que le frottement cesse; nous aurons $T = 0$, $\varphi'' = 0$, et, comme le disque part du repos, nous voyons que le cerceau ne tourne pas, c'est-à-dire que tous ces rayons ont une direction fixe. En même temps, on a

$$(R-r)\theta'^2 = 2g\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Le centre A oscille entre $+45^\circ$ et -45° comme un pendule de longueur $OA = R - r$. Le cerceau, dans ce mouvement, *roule* et *glisse* sur le disque.

Cette étude préliminaire permet de fixer le signe de T dans l'équation qui donne φ''.

Supposons maintenant le frottement assez grand pour qu'il y ait roulement; il viendra la condition géométrique

$$R\varphi' = (R-r)\theta'$$

ou

$$R\varphi'' = (R-r)\theta'';$$

on a par suite l'équation

$$\theta'' = \frac{g}{R + r}\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Le point A oscille encore comme un pendule de longueur $2(R - r)$. Les vitesses angulaires dans les deux cas sont dans le rapport de $\sqrt{2}$ et les temps des oscillations s'en déduisent.

Mais pour qu'il y ait roulement on doit avoir

$$T < N\rho;$$

on en déduit facilement

$$f > \frac{1}{2}.$$

Épreuve pratique. — *Un bassin rempli d'eau maintenue à une hauteur constante s'écoule par un tuyau* AB *dont le diamètre est égal à* $0^m,20$, *et qui a* 1000^m *de longueur. Ce tuyau débouche par son extrémité* B *dans un canal dont la section, qui est rectangulaire, a* $0^m,50$ *de largeur, et dont la pente est de* 1^m *par kilomètre. La hauteur de la surface libre du bassin au-dessus de l'extrémité* B *du tuyau est de* 10^m. *On demande quel sera le débit du tuyau, et quelle sera la profondeur de l'eau dans le canal.*

Solution.

Supposons le régime permanent établi, soit v la vitesse de l'eau dans le tuyau, et u le débit du canal. On se sert de la formule $v = 50\sqrt{\frac{1}{4}DJ}$, où D est le diamètre du tuyau et J la pente. On a

$$v = 1^m,117 \text{ par seconde}$$

et

$$q = 35^{lit} \text{ à la seconde pour le débit du tuyau.}$$

On a

$$u = \frac{q}{ab} = 50\sqrt{\frac{ab}{a+2b}} \times 1, \qquad 1 = 0,001, \qquad a = 0^{m},50.$$

On tire de là

$$b^3 - 0,008\,b - 0,002 = 0.$$

Il y a une variation dans l'équation; on en conclut l'existence d'une racine positive. On trouve environ

$$b = 0^{m},14.$$

On a ensuite

$$u = 0^{m},50.$$

Astronomie.

Première question. — *Exposé des phénomènes de précession et de nutation.*

Expliquer la signification des termes : lieu moyen, lieu vrai, lieu apparent.

Seconde question. — *Théorie de l'aberration planétaire.*

Une éphéméride donnant les lieux vrais d'une planète ou d'une comète, comment en tire-t-on les lieux apparents?

Épreuve pratique. — *Connaissant les coordonnées équatoriales* (α, δ), (α', δ') *de deux étoiles, on demande de calculer :*

1° *L'inclinaison i sur l'équateur du grand cercle passant par les deux étoiles, ainsi que l'ascension droite a de son nœud ascendant (i est compris entre* 0° *et* 90°);

2° *Les ascensions droites et les déclinaisons* (A, D), (A′, D′) *des pôles de ce grand cercle.*

Données numériques

$\alpha = 1^h.53^m.18^s,22$	$\delta = 63^\circ.43'.51'',4$
$\alpha' = 7.42.31,64$	$\delta' = 19.13.\ 9,2$

FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

PRÉPARATION A L'AGRÉGATION. — EXERCICES.

Mécanique.

Quatre tiges homogènes pesantes AB, BC, CD, DA, de même longueur l et de même masse m, sont articulées à leurs extrémités de façon à former un losange ABCD. Ce système est animé d'un mouvement de translation quelconque, mais *connu*, dans un plan vertical, la diagonale AC restant verticale dans ce mouvement, et l'angle A du losange étant 2α. Le losange vient choquer par son sommet A un plan horizontal fixe, parfaitement poli et dépourvu d'élasticité. Trouver son mouvement.

Un disque de forme quelconque est animé d'un mouvement *connu* dans son plan. A un certain instant, on saisit brusquement un de ses points o et on lui communique dans le plan une vitesse donnée de grandeur et de direction. Trouver l'état des vitesses immédiatement après cet instant. Cas où le point O est rendu fixe. Application du théorème de Carnot.

Une barre, animée d'un mouvement *connu* dans son plan, vient heurter un obstacle P, à un moment où le centre instantané de rotation se trouve sur elle. Trouver l'état des vitesses et la position de ce centre immédiatement après le choc, ainsi que la grandeur de la percussion subie par l'obstacle. Discuter les résultats suivant la position du point P sur la barre. On supposera successivement que l'obstacle est un point fixe ou un point matériel libre, que la barre est dépourvue d'élasticité ou parfaitement élastique.

Une sphère solide, homogène, pesante, de rayon R, de masse M, est animée d'un mouvement *connu* autour d'un point fixe O pris sur sa surface. A un certain instant, on fixe

brusquement un second point O′ de la surface de la sphère. Trouver le mouvement.

Mathématiques spéciales.

On considère un faisceau de coniques homofocales; soit O leur centre commun. A un point M du plan correspond une droite D joignant les projections du point O sur les tangentes aux deux coniques passant par M.

1° Déterminer la droite D, connaissant les coordonnées du point M.

2° Inversement, à une droite D correspondent deux points M et M′; les déterminer et indiquer dans quelles conditions ils sont réels.

3° A tout point M correspond de la manière précédente un point M′; définir analytiquement et étudier la transformation qui fait correspondre M et M′ l'un à l'autre.

4° Démontrer que le segment MM′ est divisé en deux parties égales par le point de contact de la conique du faisceau qui est tangente à MM′. Lorsque la droite MM′ se déplace en restant tangente à cette conique, quel est le lieu des points M et M′?

5° Lorsque M décrit une droite, quelle est l'enveloppe de MM′?

6° Lorsque la droite MM′ passe par un point fixe, quel est le lieu de M et M′? C'est une courbe anallagmatique dont on demande d'étudier les modes de génération comme enveloppe de cercles.

On considère une conique fixe S inscrite dans un triangle A′B′C′; soient A, B, C ses points de contact avec les côtés B′C′, C′A′, A′B′. Une conique variable S′ est conjuguée par rapport au triangle ABC.

1° On suppose que l'une des sécantes communes à S et S′ passe par un point donné P: déterminer l'enveloppe de la seconde sécante commune appartenant au même couple que la précédente, et le lieu du point de rencontre de ces sécantes.

2° Parmi les coniques S′ satisfaisant à la condition précédente, combien y en a-t-il qui soient tangentes à S sans être réductibles?

Peut-il arriver, pour des positions convenablement choisies du point P, que S′ soit bitangente à S?

3° On considère les coniques S′ conjuguées par rapport au triangle ABC et passant par un point M du plan; déterminer l'enveloppe des sécantes communes à S et S′; on obtient une courbe de troisième classe Γ tangente aux trois côtés du triangle A′B′C′ en des points a, b, c. Soient a', b', c' les points de contact, autres que a, b, c, des tangentes à Γ issues de A′, B′, C′. Montrer que A′a, B′b, C′c se coupent en un point Q et A′a', B′b', C′c' en un point Q′.

4° En supposant que le point M décrive la conique S, trouver le lieu du point Q′ et celui du point Q.

QUESTIONS.

1874. Soient P et Q les points de contact de deux tangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements qui se rencontrent à angle droit en M. Montrer que : 1° la hauteur et l'hypoténuse du triangle MPQ sont également tangentes à l'hypocycloïde; 2° le lieu du pied de la hauteur est une circonférence de cercle.

(E.-N. Barisien.)

1875. Calculer la limite de l'expression

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n^3}}$$

pour n infini. (E. Weill.)

ERRATA.

1897. Page 188, dans l'équation en x et y, changer r^2-y^2 en r^2-l^2.

1898. Page 590, question 1717, *lire* page 482, *au lieu de* page 582.

1899. Page 580, dixième colonne, *biffez* 1790 (*voir* même Tome, page 532).

1899. Page 587, question 1830, *lire* page 532, *au lieu de* page 432.

1900. Page 91, première ligne, *au lieu de* cotes, *lisez* Cotes.

1900. Page 190, cinquième ligne, *au lieu de* $\pm\frac{\pi}{n}$, *lisez* $\pm\frac{\pi}{4}$.

Les anciennes questions réimprimées : 583 (**1900**, p. 189) et 597 (**1900**, p. 190) ont déjà été résolues et doivent être retirées.

1900. Page 410, quatorzième ligne, *au lieu de* $Aa+Bb+Cc=a$, *lisez* $Aa+Bb+Cc=0$.

1900. Page 417, troisième ligne en remontant, *au lieu de* $\sum u'\psi'_u+0$, *lisez* $\sum u'\psi'_u=0$.

PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1900.

Résultat.

Après examen des Mémoires parvenus à la Rédaction, le prix a été décerné à M. A. Lagrange, professeur de Mathématiques au lycée de Saint-Étienne. Nous publions dans ce numéro le Mémoire de M. A. Lagrange.

[L²15c]

PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1900.

Solution par M. A. LAGRANGE,
Professeur de Mathématiques au lycée de Saint-Étienne.

I. *On propose d'établir le fait suivant :*

Il peut arriver de deux manières différentes que les neuf droites joignant trois points A, B, C *à trois points* A′, B′, C′ *soient tangentes à une quadrique :*

1° *Les trois points* A, B, C *peuvent correspondre un à un aux trois points* A′, B′, C′ *par le fait que chacun des trois quadrilatères qui ont pour sommets* B, C, B′, C′ *ou* C, A, C′, A′ *ou* A, B, A′, B′ *a ses quatre points de contact dans un même plan, la même chose n'ayant pas lieu pour les six autres quadrilatères de la figure;*

2° *Les deux points* C *et* C′, *par exemple, peuvent*

jouer un rôle à part. Les points de contact 1, 2, 3, 4 *des côtés du contour* AB'BA' *sont dans un même plan, les droites* 12 *et* 34 *coupant* AB *en* S, *les droites* 14 *et* 23 *coupant* A'B' *en* S'; *pour* C'A *et* C'B, *la corde des contacts coupe* AB *en* S, *pour* CA' *et* CB', *la corde des contacts coupe* A'B' *en* S'; *les cinq contours ayant pour sommets les points de l'un des systèmes*

$$ABA'B', \quad \begin{cases} ABA'C', \\ ABB'C', \end{cases} \quad \begin{cases} A'B'AC, \\ A'B'BC, \end{cases}$$

ont donc chacun leurs quatre points de contact dans un même plan.

II. *La figure dépend de dix-huit paramètres. Pour le premier des deux systèmes indiqués, si l'on se donne la quadrique, les trois tangentes* AA', BB', CC' *doivent satisfaire à une condition, et le contour hexagonal* AB'CA'BC'A *dépend alors d'un paramètre; la condition en question est satisfaite en particulier si les trois tangentes* AA', BB', CC' *sont concourantes. On demande, pour les deux cas, si l'on peut se donner arbitrairement les six points* A, B, C, A', B', C' *pour déterminer la quadrique, ou s'ils doivent satisfaire à une condition et donner lieu à une infinité de quadriques; à défaut d'une réponse complète à cette partie de la question, on demande d'examiner au moins le cas où les droites* AA', BB', CC' *sont concourantes.*

PREMIÈRE PARTIE.

Les propriétés à établir étant projectives, nous pouvons supposer que la quadrique est une sphère. C'est ce que nous supposerons dans cette première partie.

Faisons une projection stéréographique de la figure;

soient abc, $a'b'c'$ les projections des points ABCA'B'C'. Les cercles de contact des cônes circonscrits à la sphère et ayant pour sommets A, B, ..., C' sont projetés suivant des cercles ayant pour centres les points a, b, ..., c'; nous les désignerons par : cercles (a), (b), ..., (c'). Les cercles (a), (a'), par exemple, sont tangents comme projections de deux cercles tangents au point de contact avec la sphère de la droite AA'. Chaque cercle du groupe $(a)(b)(c)$ est donc tangent à chaque cercle du groupe $(a')(b')(c')$. Le quadrilatère AA'BB', par exemple, aura ses points de contact avec la sphère dans un même plan, si leurs projections sont sur un cercle. Or ces projections sont les points de contact des cercles (a), (b) avec les cercles (a'), (b'). En représentant par $(+1)$ un contact extérieur, par (-1) un contact intérieur, on sait que les quatre points de contact des cercles (a), (b) et (a'), (b') sont sur un même cercle si les deux contact de (a) ont le même produit que les deux contacts de (b).

Définitions. — Posons $\varepsilon_i = \pm 1$. Étant donnés deux groupes de 3 nombres

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3), \quad (\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'_3),$$

nous dirons qu'ils sont *égaux* si l'on a

$$\varepsilon_i = \varepsilon'_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

qu'ils sont *symétriques* si

$$\varepsilon_i = -\varepsilon'_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et enfin qu'ils sont *inégaux* s'ils ne sont ni égaux ni symétriques.

Les propriétés suivantes sont presque évidentes :

I. *Si deux groupes sont égaux ou symétriques, on a*

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon'_i \varepsilon'_j$$

quels que soient i et j.

II. *Si deux groupes sont inégaux, il existe un seul système ij tel que*

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon'_i \varepsilon'_j,$$

ou, ce qui revient au même, tel que

$$\varepsilon_i \varepsilon'_i = \varepsilon_j \varepsilon'_j.$$

Les deux égalités sont équivalentes, car on passe de la première à la seconde en multipliant les deux membres par $\varepsilon'_i \varepsilon_j$. Pour les démontrer supposons, par exemple, tous les ε égaux à $(+1)$; alors parmi les ε' il y en a un de signe contraire aux deux autres et la propriété est évidente.

III. *Si 3 groupes* $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$, $(\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'_3)$, $(\varepsilon''_1 \varepsilon''_2 \varepsilon''_3)$ *sont deux à deux inégaux, il n'existe pas un système de nombres ij tel que*

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon'_i \varepsilon'_j = \varepsilon''_i \varepsilon''_j.$$

Pour s'en rendre compte on peut supposer les 3 nombres du premier groupe égaux à $(+1)$. Alors on a, par exemple,

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = -1, \qquad \varepsilon'_3 = -1, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_2,$$

mais on ne saurait avoir

$$\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 = \varepsilon''_1 \varepsilon''_2,$$

car ε''_1 et ε''_2 seraient de même signe, ε''_3 serait de signe contraire à celui-là et les groupes (ε'), (ε'') seraient égaux ou symétriques.

Cela posé, formons le Tableau des contacts des cercles

(a), (b), (c) avec les cercles (a'), (b'), (c'), les contacts extérieurs étant, comme nous l'avons déjà dit, représentés par $+1$ et les contacts intérieurs par -1

	(a)	(b)	(c)
(a')	ε_1	ε_2	ε_3
(b')	ε'_1	ε'_2	ε'_3
(c')	ε''_1	ε''_2	ε''_3

Deux cas peuvent se présenter : 1° les 3 groupes (ε), (ε'), (ε'') sont deux à deux inégaux ; 2° deux d'entre eux sont égaux ou symétriques. Cela résulte de la théorie des cercles tangents à 3 cercles donnés (a'), (b'), (c'). On sait, en effet, que les 8 cercles tangents à ces 3 cercles se décomposent en 4 groupes de deux, les cercles de chaque groupe ayant avec les 3 cercles donnés des contacts de même nature ou des contacts respectivement de natures contraires.

Premier cas. — Les propriétés (II) et (III) nous montrent alors que l'on peut trouver trois combinaisons pq, rs, tu des nombres 1, 2, 3 telles que

$$\varepsilon_p\varepsilon'_p = \varepsilon_q\varepsilon'_q, \qquad \varepsilon'_r\varepsilon''_r = \varepsilon'_s\varepsilon''_s, \qquad \varepsilon''_t\varepsilon_t = \varepsilon''_u\varepsilon_u;$$

par exemple, on peut supposer que l'on a

$$\varepsilon_1\varepsilon'_1 = \varepsilon_2\varepsilon'_2, \qquad \varepsilon'_2\varepsilon''_2 = \varepsilon'_3\varepsilon''_3, \qquad \varepsilon''_1\varepsilon_1 = \varepsilon''_3\varepsilon_3.$$

Donc les 3 groupes de contacts

$$(aba'b'), \quad (aca'c'), \quad (bcb'c')$$

sont sur un même cercle et ce sont les seuls. Les 3 quadrilatères AA'BB', AA'CC', BB'CC' ont leurs points de contact dans un même plan.

Second cas. — Les deux groupes $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$, $(\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'_3)$, par exemple, sont égaux ou symétriques. Le troisième groupe $(\varepsilon''_1 \varepsilon''_2 \varepsilon''_3)$ étant inégal aux deux premiers, il existe un système de deux nombres (ij), et un seul, tel

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon'_i \varepsilon'_j = \varepsilon''_i \varepsilon''_j,$$

nous pouvons supposer $i = 1$, $j = 2$; donc

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 = \varepsilon''_1 \varepsilon''_2.$$

La propriété (I) permet de joindre à ces égalités les deux suivantes

$$\varepsilon_1 \varepsilon_3 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_3, \qquad \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_3.$$

Chacune de ces 5 égalités exprime que l'un des quadrilatères a ses contacts dans un même plan, car leurs projections sont sur un même cercle. Ce sont les quadrilatères

AA′BB′, AB′BC′, AA′BC′, AA′CB′, BB′CA′.

SECONDE PARTIE.

Étant données deux droites (Δ), (Δ') tangentes à une quadrique, on sait qu'il existe deux séries de droites tangentes à la quadrique et s'appuyant sur (Δ) et (Δ'). Les droites de chaque série ont leurs points de contact dans un même plan et décrivent sur (Δ) et (Δ') deux divisions homographiques.

Cette propriété bien connue étant rappelée, considérons 3 droites (Δ), (Δ'), (Δ'') tangentes à une quadrique; soit A un point quelconque de (Δ). Construisons un quadrilatère AB′CA′ circonscrit à la quadrique, les points B′, C, A′ étant respectivement sur Δ', Δ'', Δ; puis construisons un second quadrilatère AC′BA″ cir-

conscrit à la quadrique, les points C′, B, A″ étant respectivement sur Δ″, Δ′, Δ, et, en outre, la droite C′B étant de la même série que B′C, et B″A étant de la même série que AB′. Pour que l'on obtienne un système de 9 droites analogue au système du premier cas, il faut que les points A′ et A″ coïncident. Or, si le point A se déplace sur (Δ), A et B′ décrivent deux divisions homographiques, de même B′ et C, C et A′; donc A et A′ décrivent deux divisions homographiques sur (Δ); il en est de même de A et A″. D'autre part, on remarquera que A se déduit de A″ de la même manière que A′ se déduit de A.

Donc, s'il existe une position du point A telle que les points correspondants A′ et A″ coïncident, on pourra dire que le point A′ considéré successivement comme appartenant aux deux divisions décrites par A et A′ a le même homologue dans l'autre. Ces deux divisions sont alors en involution et A′ et A″ coïncident dans toutes les positions de A.

En d'autres termes, s'il y a un système de 9 droites satisfaisant à la question, il y en a une infinité et chaque système ne dépend que d'un paramètre, car le point A peut être pris arbitrairement sur (Δ).

Montrons que l'on peut choisir arbitrairement les deux droites Δ, Δ′ et le point de contact de Δ″. Soit C ce point de contact; soient A′ et B′ les intersections du plan tangent à la quadrique en C avec Δ et Δ′. Menons B′A et BA′ tangentes à la quadrique, A′ étant sur Δ, B étant sur Δ′ et les deux tangentes appartenant à la même série. Les cônes circonscrits à la quadrique ayant pour sommets A et B coupent le plan tangent en C suivant deux coniques ayant 4 points communs; soit C′ un de ces points; AC′, CC′, BC′ sont tangentes à la quadrique et les 6 points A, B, C, A′, B′, C′ ainsi déterminés ré-

pondent à la question. Il en résulte que l'on peut prendre pour (Δ'') la droite CC'.

Montrons encore que l'on peut prendre pour $\Delta, \Delta', \Delta''$ 3 tangentes concourantes quelconques. Soit O leur point de concours, et soient α, β, γ leurs points de contact. Si le point A de la droite (Δ) est pris en α, les deux quadrilatères AB'CA' et AC'BA'' (*voir* plus haut) se réduisent à $O\beta O\alpha$ et $O\gamma O\alpha$: les points A' et A'' étant confondus en α, la condition pour que les droites conviennent est remplie.

Considérons maintenant 6 points A, B, C, A', B', C' tels que les 3 droites AA', BB', CC' soient concourantes, et nous allons montrer qu'il existe une infinité de quadriques tangentes aux 9 droites AA', AB', ..., CC'. Soit S le point de concours des 3 droites et soient ω, ω', ω'' les points d'intersection des diagonales des 3 quadrilatères AA'BB', BB'CC', CC'AA'. Choisissons arbitrairement le point de contact I de la droite AA' avec la quadrique cherchée; si les points de contact de BB' et CC' sont I' et I'', la droite II' passe par ω et la droite I'I'' par ω' (d'après une propriété des coniques inscrites dans un quadrilatère). Lorsque I varie, les points I et I'' décrivent deux divisions homographiques; si I vient en S, il en est de même de I''; donc II'' passe par un point fixe, et comme AC' et CA' sont deux positions particulières de cette droite, ce point fixe est ω''.

On peut donc déterminer 3 coniques Σ, Σ', Σ'' inscrites dans les 3 quadrilatères, les points de contact de ces coniques avec les droites AA', BB', CC' étant les points I, I', I''. Ces 3 coniques tangentes deux à deux sont situées sur une quadrique répondant à la question, et comme le point I est arbitraire, il y a une infinité de quadriques tangentes aux 9 droites AA', AB', ..., CC'.

[F2]

SUR UNE NOUVELLE TRANSCENDANTE QUI TRANSFORME L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE DE PREMIÈRE ESPÈCE EN UNE INTÉGRALE CIRCULAIRE;

PAR M. E. IAGGI.

Considérons la fonction elliptique

$$(1) \qquad u = \operatorname{sn} x \qquad (\operatorname{mod} k),$$

dont les substitutions sont

$$(2) \quad \begin{cases} 4m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' + x \\ 2(2m+1)\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' - x \end{cases} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

et la fonction circulaire

$$(3) \qquad y = \sin \frac{\pi}{2\mathrm{K}} x,$$

dont les substitutions sont

$$(4) \quad \begin{cases} 4m\mathrm{K} + x \\ 2(2m+1)\mathrm{K} - x \end{cases} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Le groupe des substitutions (4) de la fonction y est contenu comme sous-groupe dans le groupe des substitutions (2) de la fonction u. Il s'ensuit que la fonction u de x est une fonction *uniforme* de la fonction y de x [1].

En effet, si l'on se donne une valeur quelconque de y, toutes les valeurs de x qui lui correspondent sont

[1] Ce théorème a été démontré par l'Auteur, pour des substitutions quelconques, dans ses *Recherches sur la Théorie des Fonctions*. Besançon, 1897.

données par les formules

$$\begin{aligned} x &= 4m\mathrm{K} + \alpha \\ x &= 2(2m-1)\mathrm{K} - \alpha \end{aligned} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

α étant l'une d'elles, et il est clair que les valeurs de $\operatorname{sn} x$ qui en résultent sont toutes égales à $\operatorname{sn}\alpha$; une valeur de y ne détermine donc qu'une valeur de u et, par suite, u est une fonction uniforme de y.

Nous écrirons donc, φ étant une fonction uniforme,

$$\operatorname{sn} x = \varphi\left(\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}x\right),$$

ou simplement

$$u = \varphi(y) \qquad \left(u = \operatorname{sn} x,\ y = \sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}x\right).$$

Cette fonction φ jouit de propriétés remarquables que la présente Note a pour but d'indiquer.

1° On a

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = dx, \qquad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2\mathrm{K}}dx,$$

et, par conséquent,

$$(5) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)}} = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Cette équation, jointe à la condition évidente

$$\varphi(0) = 0,$$

détermine complètement la fonction φ. On peut d'ailleurs écrire

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}\frac{\sqrt{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)}}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Cette équation paraît plus compliquée que celle qui détermine u comme fonction de x. Nous verrons cepen-

dant que la fonction $\varphi(y)$ a une forme explicite *plus simple* que celle de $\operatorname{sn} x$.

2° On sait que l'intégrale générale de l'équation qui détermine $u = \operatorname{sn} x$ est

$$\operatorname{sn}(x + c),$$

c étant une constante quelconque, c'est-à-dire

$$\frac{u\,\Delta\lambda + \lambda\,\Delta u}{1 - k^2\lambda^2 u^2},$$

où l'on a posé

$$\Delta u = \sqrt{(1 - u^2(1 - k^2 u^2)},$$

et où λ est une constante quelconque ($\lambda = \operatorname{sn} c$).

Il en résulte que l'intégrale générale de l'équation différentielle à laquelle satisfait $\varphi(y)$ est

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(y\sqrt{1 - c'^2} + c'\sqrt{1 - y^2}) = \dfrac{\varphi(y)\,\Delta\varphi(c') + \varphi(c')\,\Delta\varphi(y)}{1 - k^2\varphi^2(y)\,\varphi^2(c')} \\ \qquad \left(c' = \sin\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}\,c\right). \end{array} \right.$$

C'est ainsi que se transforme, à l'égard de $\varphi(y)$, le théorème d'addition de $\operatorname{sn} x$.

3° Les zéros de $\varphi(y)$ sont les valeurs de

$$y = \sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\,x$$

obtenues par les valeurs suivantes de x qui sont les zéros de $\operatorname{sn} x$:

$$2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'.$$

Ces zéros sont donc donnés par la formule générale

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} y = \sin\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}(2m\mathrm{K} + ni\mathrm{K}') = \pm\sin ni\pi\dfrac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} = \dfrac{q^n - q^{-n}}{2i} \\ \left(q = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}\right) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{array} \right.$$

Ces points sont tous purement imaginaires, à l'exception du point zéro obtenu en annulant n.

Les infinis de $\varphi(y)$ sont les valeurs de y obtenues par les valeurs suivantes de x qui sont les infinis de $\operatorname{sn} x$:

$$2m\mathrm{K} + (2n+1)i\mathrm{K}'.$$

Ces infinis sont donc donnés par la formule générale

$$(8)\quad \begin{cases} y = \sin\dfrac{\pi}{2\mathrm{K}}\left[2m\mathrm{K} + (2n+1)i\mathrm{K}'\right] = \pm\sin\dfrac{2n+1}{2}i\pi\dfrac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} \\ \quad = \dfrac{q^{\frac{2n+1}{2}} - q^{-\frac{2n+1}{2}}}{2i} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases}$$

Ces points sont tous purement imaginaires.

4° La fonction $\varphi(y)$ est impaire. On a, en effet,

$$\operatorname{sn}(-x) = -\operatorname{sn} x$$

et, par conséquent,

$$\varphi\left(-\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}x\right) = -\varphi\left(\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}x\right),$$

c'est-à-dire

$$(9)\qquad \varphi(-y) = -\varphi(y).$$

5° La fonction $\varphi(y)$ étant uniforme a des substitutions qui la laissent invariable [1]. La manière dont $\varphi(y)$ est déterminée donne immédiatement ces substitutions. On a, en effet,

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \operatorname{sn} x = \operatorname{sn}(x + 2ni\mathrm{K}') \\ &= \varphi\left[\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x + 2ni\mathrm{K}')\right] = \varphi\left(b_n y + a_n\sqrt{1-y^2}\right) \end{aligned}$$

où

$$a_n = \sin ni\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} = \frac{q^n - q^{-n}}{2i} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$b_n = \cos ni\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} = \frac{q^n + q^{-n}}{2} \qquad (a_n^2 + b_n^2 = 1).$$

Posant

$$\alpha_n = ia_n, \qquad \beta_n = b_n \qquad (\beta_n^2 - \alpha_n^2 = 1),$$

---

[1] *Loc. cit.*

on voit que $\varphi(y)$ admet les substitutions réelles

$$(10) \qquad s_n(y) = \beta_n y - \alpha_n \sqrt{y^2 - 1},$$

qui sont toutes obtenues par répétition ou inversion de la substitution fondamentale

$$\beta_1 y - \alpha_1 \sqrt{y^2 - 1},$$

car on a

$$s_n(y) = s_{n-1}[s_1(y)].$$

Le changement de x en $4K + x$ ou en $2K - x$ ne donne évidemment pas d'autres substitutions pour la fonction $\varphi(y)$.

$\operatorname{sn} x$ n'admettant pas d'autres substitutions que celles dont nous nous sommes servis, $\varphi(y)$ n'admet pas d'autres substitutions que les précédentes.

6° Si, dans l'égalité

$$u = \operatorname{sn} x = \varphi\left(\sin \frac{\pi}{2K} x\right),$$

on change x en $K + x$, on obtient

$$(11) \qquad v = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} = \varphi\left(\cos \frac{\pi}{2K} x\right),$$

où v est la fonction dont nous avons parlé déjà dans ce Journal, dont les propriétés corrélatives avec u montrent, mieux que $\operatorname{cn} x$, l'analogie des fonctions elliptiques et des fonctions circulaires, et dont l'emploi serait de nature à simplifier la théorie des fonctions elliptiques [1].

L'égalité précédente montre une nouvelle corrélation entre u et v : *u et v sont la même fonction uniforme, l'une de* $\sin \frac{\pi}{2K} x$, *l'autre de* $\cos \frac{\pi}{2K} x$. Ce fait montre bien comment, à l'égard de la période réelle $4K$, u joue le rôle de sinus et v le rôle de cosinus.

On pouvait d'ailleurs se rendre compte directement

---

[1] *Sur les fonctions elliptiques de première espèce* (*Nouvelles Annales*, 1898).

que v est une fonction uniforme de $\cos\frac{\pi}{2K}x$ en remarquant que le groupe des substitutions de $\cos\frac{\pi}{2K}x$

$$4mK \pm x \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

est contenu comme sous-groupe dans le groupe des substitutions de la fonction v

$$4mK + 2niK' \pm x \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

7° La fonction $\varphi(y)$ étant telle qu'en posant

$$y = \sin\frac{\pi}{2K}x,$$

on obtient la fonction $u(x)$, et qu'en posant

$$y = \cos\frac{\pi}{2K}x,$$

on obtient la fonction $v(x)$, on pourra obtenir de deux manières différentes son expression en y; on a, en effet,

$$u = \frac{H(x)}{\sqrt{k}\,\Theta(x)} = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\sin\frac{\pi}{2K}x\prod_n\frac{1 - 2q^{2n}\cos\frac{\pi}{K}x + q^{4n}}{1 - 2q^{2n-1}\cos\frac{\pi}{K}x + q^{2(2n-1)}},$$

$$v = \frac{H_1(x)}{\sqrt{k}\,\Theta_1(x)} = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\cos\frac{\pi}{2K}x\prod_n\frac{1 + 2q^{2n}\cos\frac{\pi}{K}x + q^{4n}}{1 + 2q^{2n-1}\cos\frac{\pi}{K}x + q^{2(2n-1)}}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si, dans la première de ces formules, on remplace $\sin\frac{\pi}{2K}x$ par y, ou si dans la seconde on remplace $\cos\frac{\pi}{2K}x$ par y, on a l'expression cherchée de $\varphi(y)$:

$$(12) \qquad \varphi(y) = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\,y\prod_n\frac{(1 - q^{2n})^2 + 4q^{2n}y^2}{(1 - q^{2n-1})^2 + 4q^{2n-1}y^2}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sur cette formule on vérifie facilement les propriétés que nous avons démontrées plus haut.

Les fonctions

$$\operatorname{cn} x = \sqrt{1 - \varphi^2(y)}, \qquad \operatorname{dn} x = \sqrt{1 - k^2 \varphi^2(y)}$$

$\left(\text{où } y = \sin \frac{\pi}{2K} x\right)$ peuvent aussi s'exprimer par des formules analogues rationnelles. La formule de la dérivée $\varphi'(y)$ se transforme d'une manière intéressante : on a en effet

$$\varphi(y) = \operatorname{sn} x \qquad \left(y = \sin \frac{\pi}{2K} x\right),$$

d'où

$$\varphi'(y) \frac{\pi}{2K} \cos \frac{\pi}{2K} x = \frac{d}{dx} \operatorname{sn} x = \frac{k'}{\sqrt{k}} \frac{H_1(x)\,\theta_1(x)}{\theta^2(x)},$$

et par conséquent

$$(13) \quad \varphi'(y) = \frac{4K}{\pi} \sqrt[4]{q} \frac{k'}{\sqrt{k}} \prod_n \frac{(1 - q^n)^2 - 4 q^n y^2}{[(1 - q^{2n-1})^2 - 4 q^{2n-1} y^2]^2}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

8° Si l'on a

$$u(x) = \varphi(y),$$

on aura

$$v(x) = \varphi(\sqrt{1 - y^2}),$$

et par conséquent, grâce aux propriétés connues de u et de v [1]

$$\varphi(\sqrt{1 - y^2}) = \sqrt{\frac{1 - \varphi^2(y)}{1 - k^2 \varphi^2(y)}},$$

$$\varphi(y) = \sqrt{\frac{1 - \varphi^2(\sqrt{1 - y^2})}{1 - k^2 \varphi^2(\sqrt{1 - y^2})}},$$

relations qui peuvent être réunies dans la suivante

$$\varphi^2(y) + \varphi^2(\sqrt{1 - y^2}) = 1 + k^2 \varphi^2(y)\, \varphi^2(\sqrt{1 - y^2}),$$

---

[1] *Loc. cit.* (*Nouvelles Annales*).

qu'on pouvait obtenir en faisant $c' = 1$ dans le théorème d'addition (6).

D'autre part, ce théorème d'addition pourra, grâce à la fonction v, être transformé au moyen des relations connues [1]

$$u(a+b) = \frac{u_a v_b + v_a u_b}{1 + k^2 u_a u_b v_a v_b}, \qquad v(a+b) = \frac{v_a v_b - u_a u_b}{1 - k^2 u_a u_b v_a v_b}.$$

En posant

$$\alpha = \sin \frac{\pi}{2K} a, \qquad \beta = \sin \frac{\pi}{2K} b,$$

la première de ces formules donne

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(\alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2}) \\ &= \frac{\varphi(\alpha)'\varphi(\sqrt{1-\beta^2}) + \varphi(\beta)\varphi(\sqrt{1-\alpha^2})}{1 + k^2\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\sqrt{1-\alpha^2})\varphi(\sqrt{1-\beta^2})}. \end{aligned} \right.$$

En posant

$$\alpha = \cos \frac{\pi}{2K} a, \qquad \beta = \cos \frac{\pi}{2K} b,$$

la formule de $v(a+b)$ donne

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(\alpha\beta - \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}) \\ &= \frac{\varphi(\alpha)\varphi(\beta) - \varphi\sqrt{1-\alpha^2})\varphi(\sqrt{1-\beta^2})}{1 - k^2\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\sqrt{1-\alpha^2})\varphi(\sqrt{1-\beta^2})}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules (14) et (15) sont, au fond, identiques; mais si l'on y fait $\beta = \alpha$, on obtient les deux formules distinctes

$$(16) \qquad \varphi(2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}) = \frac{2\varphi(\alpha)\varphi(\sqrt{1-\alpha^2})}{1 + k^2\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\sqrt{1-\alpha^2})},$$

$$(17) \qquad \varphi(2\alpha^2 - 1) = \frac{\varphi^2(\alpha) - \varphi^2(\sqrt{1-\alpha^2})}{1 - k^2\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\sqrt{1-\alpha^2})},$$

---

[1] *Loc. cit.* (*Nouvelles Annales*).

qui sont, à l'égard de $\varphi(y)$, les transformées des formules de multiplication par 2, des fonctions elliptiques $u(2x)$, $v(2x)$. Les formules qui donnent $u(3x)$, $v(3x)$, $u(4x)$, $v(4x)$, etc., se transformeraient d'une manière analogue.

Enfin, on peut transformer l'expression de la dérivée de la manière suivante; on a

$$\frac{\pi}{2K}\sqrt{1-y^2}\,\varphi'(y)$$
$$= u'(x) = v(1-k^2u^2) - \frac{1-u^2}{v} = \frac{k'^2 v}{1-k^2v^2} \quad (^1).$$

et par conséquent

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi'(y) &= \frac{2K}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,\varphi(\sqrt{1-y^2})[1-k^2\varphi^2(y)] \\ &= \frac{2K}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,\frac{1-\varphi^2(y)}{\varphi(\sqrt{1-y^2})} \\ &= \frac{2K}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,k'^2\,\frac{\varphi(\sqrt{1-y^2})}{1-k^2\varphi^2(\sqrt{1-y^2})}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules ne contiennent explicitement pas d'autre irrationnelle que le dénominateur $\sqrt{1-y^2}$. D'ailleurs $\varphi(\sqrt{1-y^2})$ ne contient pas d'autre irrationnelle que $\sqrt{1-y^2}$ en facteur d'une expression rationnelle. Ces formules suffisent donc à montrer que $\varphi'(y)$ est rationnelle en y. La transformation de $v'(x)$ ne conduit pas à d'autres formules.

9° Les formules que nous avons établies permettent d'étudier facilement les variations de la fonction *réelle* φ de la variable *réelle* y et de construire la courbe représentative de ces variations. Remarquons tout d'abord que φ étant une fonction impaire, la courbe est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées φ et y.

(1) *Loc. cit.* (*Nouvelles Annales*).

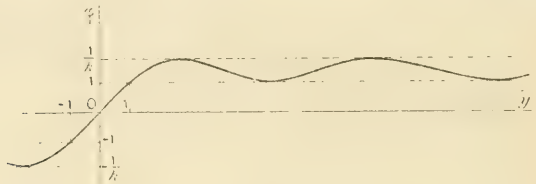
et qu'il nous suffira de faire varier y par des valeurs positives. Les égalités

$$\varphi'(y) = \frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)}{1-y^2}}, \qquad \varphi(0)=0, \qquad \varphi(1)=1$$

montrent que lorsque y croît de 0 à 1, φ croît aussi de 0 à 1. La tangente à l'origine est donnée par

$$\varphi'(0) = \frac{2K}{\pi}.$$

La tangente au point 1 nous est donnée par la dernière



formule que nous avons démontrée pour φ' (18)

$$\varphi'(1) = \frac{2K}{\pi}k'^2 \lim\left[\frac{\varphi(\sqrt{1-y^2})}{\sqrt{1-y^2}}\right]_{y=1}$$
$$= \frac{2K}{\pi}k'^2 \lim\left[\frac{\varphi(y)}{y}\right]_{y=0} = \frac{4K^2}{\pi^2}k'^2.$$

Lorsque y croît au delà de l'unité, φ croît au delà de l'unité et, à partir de ce moment, reste toujours compris entre 1 et $\frac{1}{k}$.

φ atteint la valeur $\frac{1}{k}$, pour les valeurs de y données par la formule

$$y = \sin\frac{\pi}{2K}[K+(2n+1)iK']$$
$$= \cos\frac{2n+1}{2}i\pi\frac{K'}{K} = \frac{q^{\frac{2n+1}{2}} + q^{-\frac{2n+1}{2}}}{2}$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

qui sont données par l'égalité

$$\varphi(y) = \operatorname{sn} x = \frac{1}{k}.$$

Ces valeurs annulent d'ailleurs φ' et rendent négative φ'' que l'on calcule facilement; on obtient donc ainsi des maxima pour φ. Il n'y a de difficulté, pour trouver le signe φ'', que de zéro au premier maximum $\frac{1}{k}$; on trouve que φ'' est négative dans tout cet intervalle, mais nous n'en reproduirons pas ici la démonstration, qui est longue.

φ atteint la valeur 1 pour les valeurs de y données par la formule

$$y = \sin\frac{\pi}{2K}(K + 2ni K') = \cos ni\pi \frac{K'}{K} = \frac{q^n - q^{-n}}{2}$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

qui sont données par l'égalité

$$\varphi(y) = \operatorname{sn} x = 1.$$

Ces valeurs annulent toutes φ', sauf la première, qui est 1 et pour laquelle nous avons calculé la valeur de φ'; la dérivée seconde φ'' est positive en toutes ces valeurs, sauf en la première, où elle est négative. Ces points pour lesquels $\varphi = 1$, $\varphi' = 0$ sont donc des minima.

Enfin, si l'on calcule l'intervalle sur l'axe Oy, entre un maximum et le minimum suivant, ou entre un minimum et le maximum suivant, on voit que cet intervalle croît indéfiniment et au delà de toute limite.

A partir du point $y = 1$, la courbe, tout entière contenue entre les deux parallèles 1 et $\frac{1}{k}$, affecte donc une forme sinueuse et oscille entre ces deux parallèles de manière que les sinuosités s'élargissent indéfiniment et au delà de toute limite.

[M³5j]

SUR UNE GERBE DE CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. STUYVAERT,
Professeur à Gand.

Tandis que les coniques ayant un double contact constituent un cas particulier d'un faisceau ponctuel, dont elles possèdent les propriétés, les cubiques gauches passant par deux points et y possédant mêmes tangentes et mêmes plans osculateurs s'écartent beaucoup de celles qui ont cinq points communs (¹).

Les unes et les autres constituent bien une gerbe, et chaque point de l'espace détermine une courbe du système, comme von Staudt l'a montré le premier (²); mais là s'arrête à peu près l'analogie.

M. R. Sturm (³) a d'abord attiré l'attention sur la gerbe qui nous occupe. Il a fait voir qu'un tétraèdre d'osculation ABCD, lorsqu'on ne spécifie pas lesquelles de ses arêtes sont tangentes, corde, etc., appartient à douze gerbes de cubiques gauches.

A son exemple, nous ne considérons que les courbes qui passent par A et C, y touchent respectivement AB et CD, et y osculent les plans ABD, CBD; par suite, AD et CB sont, pour toutes ces cubiques, deux droites associées de Cremona.

(¹) Cette dernière gerbe a été étudiée par MM. Reye (*Zeitsch. f. Math. u. Phys.*, t. XIII), R. Sturm (*Journ. de Crelle*, t. 79), Königs [*Nouv. Ann. de Math.* (3e série), t. II].

(²) *Geometrie der Lage, Beiträge*, § 464.

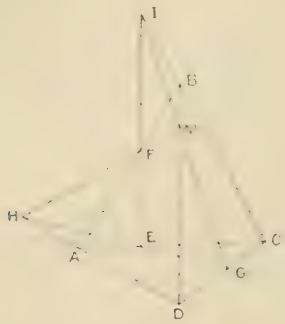
(³) *Math. Annalen*, t. XXVI, p. 405-408.

M. Heinrichs [1] a publié une étude approfondie du sujet, en se servant de la Géométrie projective. Après ce travail très complet, il ne reste guère de résultat important à trouver, mais on peut essayer d'autres méthodes pour établir la théorie. Dans un travail récemment soumis à l'Académie de Belgique, nous proposons une légère modification à la représentation paramétrique des courbes gauches du troisième ordre, de manière à la rendre applicable à la gerbe de cubiques ayant même tétraèdre d'osculation.

Ici, nous essayerons de retrouver quelques-unes des propriétés de ce système en utilisant la Géométrie analytique plane.

1. Un plan ν ne passant par aucun sommet du tétraèdre ABCD (*fig.* 1) coupe respectivement en E,

Fig. 1.



F, G, H, I, M les arêtes AC, AB, CD, AD, BC, BD de ce dernier et contient trois points P, Q, R d'une des courbes de la gerbe.

Le cône de sommet A perspectif à cette cubique coupe

[1] E. Heinrichs, *Ueber den Bündel derjenigen kubischen Raumcurven, welche, etc.* (Diss. *Munster*, 1887).

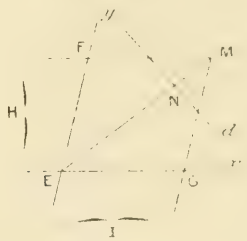
le plan ν suivant une conique passant par P, Q, R, E, F et tangente en E à EG et en F à FH.

La trace, sur ν, du cône de sommet C perspectif à la cubique est une conique passant par P, Q, R, touchant EF en E et GI en G.

En faisant varier la cubique de la gerbe, on engendre, dans le plan ν, deux faisceaux de coniques ayant un double contact et situés de manière que l'une des tangentes communes de l'un des systèmes est corde de contact de l'autre et inversement.

La généralité du raisonnement ne sera pas restreinte si nous supposons les points I et H à l'infini, car le principe d'homographie permettra d'étendre les résultats. En prenant ensuite EG et EF pour axes de coor-

Fig. 1.



données, nous pourrons représenter IG et FH respectivement par les équations

$$x = a, \qquad y = b.$$

Dès lors, le problème est ramené à la recherche des propriétés des termes de points P, Q, R qui, avec l'origine E, constituent l'intersection de deux courbes quelconques des systèmes représentés par les équations

$$x(x - a) = k y^2,$$
$$y(y - b) = q x^2.$$

dont la première se rapporte aux coniques ayant un double contact en E et G.

Remarquons en passant que les points P, Q, R communs à deux des courbes considérées appartiennent aussi à une conique passant par H, E, G, I, car les équations précédentes donnent, par multiplication,

$$(x-a)(y-b)=\lambda\mu xy,$$

et cette relation représente une hyperbole à asymptotes parallèles aux axes coordonnés et passant par F et G.

2. Toute la question est de préciser la liaison des points P, Q, R.

Or, un point $P(x', y')$ détermine une conique de chacun des deux systèmes considérés ci-dessus; ces deux courbes ont respectivement pour équation

$$(1)\qquad x(x-a)y'^2=x'(x'-a)y^2,$$

$$(2)\qquad y(y-b)x'^2=y'(y'-b)x^2.$$

Multiplions, par bx' et ay', respectivement les termes de la première et de la seconde égalité et soustrayons; nous obtenons, après quelques calculs,

$$(xy'-x'y)[(bx'+ay'-ab)(xy'+x'y)-abx'y']=0.$$

Cette équation représente deux droites passant par E, P, Q, R; et comme le premier facteur, égalé à zéro, représente EP, on a, en faisant abstraction de ce facteur, l'équation de la droite QR.

Celle-ci est parallèle à la droite

$$xy'+x'y=0,$$

c'est-à-dire à la conjuguée harmonique de EP par rapport aux axes; donc, dans le cas général, les droites EP, QR déterminent, sur HI, deux points conjugués harmoniques par rapport à H et I.

Or on sait que les points d'une droite HI alignés, avec les sommets d'un triangle PQR, sur un point fixe E, et les intersections de HI avec les côtés opposés de PQR sont en involution. Nous voyons ici que les involutions, déterminées de cette façon par les triangles PQR relatifs à toutes les cubiques de la gerbe, se confondent et ont H et I pour points doubles.

3. Pour qu'une courbe du système soit tangente au plan ν, il faut que deux des points P, Q, R coïncident, ou que QR passe par P; cette condition s'exprime par l'égalité

$$(3) \qquad bx' - ay' = \frac{3ab}{2}.$$

Le lieu des points de contact du plan ν avec les cubiques de la gerbe auxquelles il est tangent est une droite.

Appelons cette droite d; nous y reviendrons bientôt. Remarquons auparavant que les points P, Q, R jouent évidemment le même rôle et qu'en faisant coïncider P avec un des deux autres points, nous n'enlevons rien à la généralité de la solution qui précède.

Nous découvrirons une autre propriété en exprimant que les points Q et R se confondent, ou que la droite QR, représentée par

$$(4) \qquad (ay' - bx' - ab)(xy' - x'y) - abx'y' = 0$$

touche l'une des coniques (1) ou (2), par exemple celle qui a pour équation

$$x(x - a)y'^2 - x'(x' - a)y^2.$$

En posant

$$\lambda = \frac{x'y'}{ay' - bx' - ab},$$

on peut écrire l'égalité (4) sous la forme

$$xy' + x'y - abs = 0.$$

La condition de contact est alors

$$\begin{vmatrix} y'^2 & 0 & -\frac{ay'^2}{2} & y' \\ 0 & -x'(x'-a) & 0 & x' \\ -\frac{ay'^2}{2} & 0 & 0 & -abs \\ y' & x' & -abs & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$(5) \qquad (ay' + bx' - ab)^2 = 4ab(x'-a)(y'-b).$$

Si x' et y' sont les coordonnées courantes, cette relation représente une conique S, lieu du point P, tel que les points correspondants Q et R coïncident.

Les cubiques gauches de la gerbe qui touchent un plan ν le coupent encore sur une conique.

La conique S est une parabole dont l'axe est parallèle à EM et qui touche MG en G et MF en F; elle est tangente aussi à la droite d dont l'équation

$$(3) \qquad ay' + bx' = \frac{3ab}{2}$$

a été trouvée plus haut; cette droite joint les milieux de FM et GM; son point de contact avec S est au milieu N du segment déterminé sur elle par les axes coordonnés ou par FM et GM.

Dans le cas général, S touche HI au conjugué harmonique, relativement à H et I, du point de rencontre de FG et HI; le point N est toujours à l'intersection de d et de EM.

Si le point P est sur d, l'un des autres points, Q par

exemple, coïncide avec P, et la droite correspondante QR a pour équation

$$(4) \qquad (ay' + bx' - ab)(yx' + xy') - abx'y' = 0,$$

avec la relation

$$(3) \qquad ay' + bx' = \frac{3ab}{2}.$$

Cette droite coupe la conique S en deux points, mais il est évident qu'un seul de ceux-ci est le point R.

Pour établir la distinction, qui sera d'ailleurs précisée par ce qui va suivre, on peut observer dès à présent que ce point R doit se trouver sur une courbe déterminée de chacun des deux faisceaux considérés au début.

Si l'on cherche l'enveloppe de la droite mobile représentée par l'équation (4), ses coefficients étant liés par la relation (3), on obtient la conique

$$(ay + bx - 3ab)^2 = 4abxy.$$

C'est encore une parabole T touchant d en N et, par suite, tangente, en ce point, à la conique S; T touche les axes en des points $x = 3a$, $y = 3b$.

Dans le cas général, nous pouvons énoncer la propriété suivante, qui s'établit d'ailleurs très facilement aussi par la Géométrie projective :

La droite qui joint un point P *de* d *au point correspondant* R *de la conique* S *enveloppe une conique* T *ayant avec* S *un double contact, en* N *et sur la droite* HI.

4. Si l'on veut chercher directement l'enveloppe des tangentes aux cubiques de la gerbe qui touchent le plan ν, c'est-à-dire des droites QR représentées par

$$(ay' + bx' - ab)(yx' + xy') - abx'y' = 0.$$

les coefficients x', y' (coordonnées de P) étant liés par la condition

$$(ay' - bx' - ab)^2 = 4ab(x' - a)(y' - b),$$

les calculs sont assez longs. On les évite en posant

$$p = \frac{ay' + bx' - ab}{abx'}, \qquad q = \frac{ay' - bx' - ab}{aby'};$$

p et q sont alors les coordonnées tangentielles de la droite dont on cherche l'enveloppe: on tire de là

$$x' = \frac{abq}{ap + bq - abpq}, \qquad y' = \frac{abp}{ap + bq - abpq}.$$

Substituant dans la condition, on obtient, après avoir simplifié,

$$abpq = 4(1 - bq)(1 - ap),$$

équation représentant une conique; on l'écrit, en coordonnées ponctuelles,

$$(4ay + 4bx - 3ab)^2 = 16abxy.$$

On reconnait une ellipse U tangente aux axes coordonnés respectivement en des points

$$x = \frac{3a}{4}, \qquad y = \frac{3b}{4},$$

tangente à d au même point N où cette droite touche S et T, tangente à la parallèle à FG menée par le milieu de EF, tangente enfin aux droites FH et HG.

Dans le cas général, *l'enveloppe des tangentes des cubiques gauches de la gerbe, situées dans le plan* ν, *est une conique touchant les traces des quatre faces du tétraèdre d'osculation.*

Comme une tangente variable d'une conique coupe quatre tangentes fixes (EF, EG, FM, GM) en quatre

points dont le rapport anharmonique est constant; comme, en outre, pour la tangente spéciale d, ce rapport est $\frac{1}{4}$ et ne dépend par conséquent pas de la position du plan ν, on voit que les tangentes à toutes les cubiques de la gerbe coupent les faces du tétraèdre d'osculation en quatre points dont le rapport anharmonique est constamment égal à $\frac{1}{4}$. Ceci démontre le théorème suivant, dû à M. Sturm et précisé par M. Heinrichs, qui a trouvé la valeur $\frac{1}{4}$ du rapport anharmonique.

Les tangentes aux cubiques de la gerbe sont les rayons d'un complexe tétraédral.

5. Le point N, déjà rencontré plusieurs fois, est évidemment le point de contact de la cubique de la gerbe qui oscule le plan ν.

Dans le cas général, on voit donc que si, en trois points A, C, N d'une cubique gauche, on mène les plans osculateurs α, γ, ν : 1° le point M commun à ces plans, le point N et la trace E de la corde AC sur le plan ν sont en ligne droite, c'est-à-dire que M est dans le plan ACN (théorème de Chasles); 2° la droite NME coupant en L la droite HI du plan ν qui s'appuie sur les droites associées AD, CB, on a le rapport anharmonique

$$(\mathrm{MENL}) = -\tfrac{1}{3}.$$

On voit sans peine que la conique S est la trace, sur ν, de la développable osculatrice, à la cubique gauche qui oscule le plan ν.

Des relations

$$x' = \frac{abq}{ap + bq - abpq}, \qquad y' = \frac{abp}{ap + bq - abpq},$$

on déduit encore : qu'une seule cubique de la gerbe admet pour sécante une droite donnée, ayant pour coor-

données tangentielles p et q; que, si le point $P(x', y')$ décrit une droite, la droite correspondante $QR(p, q)$ enveloppe une conique; que, si QR pivote autour d'un point, P décrit une conique.

Enfin, on peut établir avec précision la transformation dans laquelle un sommet du triangle PQR répond au côté opposé. Si l'on considère le point P_1, ayant pour coordonnées $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$, on voit immédiatement qu'il correspond à P dans une homologie harmonique, dont le centre est E et dont l'axe a pour équation

$$ay' + bx' = 2ab,$$

c'est-à-dire que cet axe joint le point M au point de rencontre de HI et FG. Quant au point P_1 et à la droite QR, on les déduit l'un de l'autre par la transformation très simple que voici : QR joint les points où HP_1 et IP_1 rencontrent respectivement EF et EG.

[O51]

SUR DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE;

PAR M. C. LAMIONI.

M. Bianchi, en partant de la formule qui exprime la deuxième courbure d'une ligne géodésique en un point M d'une surface [1], a démontré les deux théorèmes suivants :

1° *Si une ligne de courbure est géodésique, elle est plane.*

[1] *Voir* BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, p. 151.

2° *Chaque ligne géodésique plane est ligne de courbure.*

Le but de cette Note est de donner une démonstration directe et très simple de ces deux théorèmes.

1. Soit L une ligne de courbure et géodésique située sur une surface; les coordonnées

$$x, \quad y, \quad z$$

d'un point quelconque de L peuvent être exprimées en fonction de l'arc s de L.

Soient

$$X, \quad Y, \quad Z$$

les cosinus directeurs de la normale à la surface;

$$\cos\xi, \quad \cos\eta, \quad \cos\zeta$$

les cosinus de la normale principale de L; d'après l'hypothèse que nous avons posée, nous aurons [1]

$$\frac{dx}{ds} : \frac{dy}{ds} : \frac{dz}{ds} = \frac{dX}{ds} : \frac{dY}{ds} : \frac{dZ}{ds}, \tag{1}$$

$$X = \cos\xi, \qquad Y = \cos\eta, \qquad Z = \cos\zeta. \tag{2}$$

En dérivant par rapport à s les relations (2) et en tenant compte des formules de Serret, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= -\frac{\cos\alpha}{\rho} - \frac{\cos\lambda}{T}, \\ \frac{dY}{ds} &= -\frac{\cos\beta}{\rho} - \frac{\cos\mu}{T}, \\ \frac{dZ}{ds} &= -\frac{\cos\gamma}{\rho} - \frac{\cos\nu}{T}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Si nous exprimons par $\frac{1}{k}$ la valeur commune des rap-

[1] *Voir* BIANCHI, *Lezioni, etc.*, p. 98.

ports

$$\frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dX}{ds}} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dY}{ds}} = \frac{\frac{dz}{ds}}{\frac{dZ}{ds}},$$

les formules (3), en tenant compte de la relation (1) et de l'identité

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \qquad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma,$$

nous donneront

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} k\cos\alpha &= -\frac{\cos\alpha}{\rho} - \frac{\cos\lambda}{T}, \\ k\cos\beta &= -\frac{\cos\beta}{\rho} - \frac{\cos\mu}{T}, \\ k\cos\gamma &= -\frac{\cos\gamma}{\rho} - \frac{\cos\nu}{T}. \end{aligned} \right.$$

En multipliant respectivement les équations (4) par

$$\cos\lambda, \quad \cos\mu, \quad \cos\nu$$

et en ajoutant, on obtient

$$\frac{1}{T} = 0,$$

d'où il suit que la ligne L est bien une ligne plane.

2. Pour la démonstration du deuxième théorème, il faut remarquer que, d'après la nouvelle hypothèse

$$\frac{1}{T} = 0,$$

les formules (3) (vérifiées aussi dans ce cas) nous donneront

$$\frac{\frac{dX}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\frac{dY}{ds}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\frac{dZ}{ds}}{\frac{dz}{ds}} = \ldots = \ldots,$$

d'où l'on tire

$$dX : dY : dZ = dx : dy : dz :$$

proportion caractéristique que l'on obtient en se déplaçant le long d'une ligne de courbure, et, par suite, la ligne L est bien ligne de courbure. C. Q. F. D.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1909. — COMPOSITIONS.

Montpellier.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une surface est représentée, par rapport à des axes rectangulaires, par l'équation*

$$Z = f(x) + \varphi(y),$$

déterminer les fonctions f et φ de façon que la somme des rayons de courbure principaux soit nulle en tout point de la surface.

Calculer les rayons de courbure principaux de la surface obtenue, et déterminer ses lignes asymptotiques.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la surface de la partie du cylindre*

$$y^2 = 2px$$

comprise à l'intérieur de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = (2p + a)x.$$

Astronomie.

Épreuve écrite. — I. *Déduire du principe de la gravitation universelle les lois du mouvement d'un corps céleste autour du Soleil.*

II. *Définir les éléments d'une orbite elliptique et faire connaître à l'instant t :*

1° *La position de la planète dans son orbite;*

2° *Ses coordonnées rectangulaires héliocentriques;*

3° *Ses coordonnées géocentriques équatoriales.*

Épreuve pratique. — *La latitude géographique de Montpellier est* 43°36′44″,0.

Calculer la latitude géocentrique φ' *et la distance géocentrique* h *du même point en adoptant les valeurs suivantes des éléments du sphéroïde terrestre :*

Rayon équatorial..... $a = 6\,377\,397^{m},15$

Rayon polaire..... $b = 6\,356\,078^{m},96$

$$\varepsilon = \text{aplatissement} = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{299,153}.$$

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Dans un plan fixe, une barre homogène non pesante,* AB, *est mobile autour de son extrémité* A *qui est fixe. Un point* M, *non pesant, assujetti à se mouvoir sur la barre, est attiré par chaque élément de celle-ci proportionnellement aux masses et à la distance, l'attraction étant égale à l'unité pour des masses égales à l'unité placées à l'unité de distance.*

I. *Établir les équations qui déterminent le mouvement du système.*

II. *On suppose la masse de la barre égale à* 3, *celle du point* M *égale à* 1, *la longueur de la barre égale à* 1, *la vitesse angulaire initiale de la barre égale à* ω, *et enfin la vitesse relative initiale du point* M *sur la barre égale à* 0.

Dans ces hypothèses, étudier en détail le mouvement dans les deux cas :

1° *La position initiale du point* M *est* A;

2° *Cette position initiale est* B.

Épreuve pratique. — Ox, Oy, Oz *sont trois axes rectangulaires. On considère le tore engendré par la révolution autour de* Oz *d'un cercle situé dans le plan* zOx, *de rayon* R, *et dont le centre est place sur* Ox *à la distance* a *du point* O ($a > R$).

On suppose le tore rempli d'une matière homogène, et l'on demande de calculer les moments d'inertie du tore par rapport aux trois axes Ox, Oy, Oz.

Grenoble.

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Réduction des observations méridiennes pour la détermination de l'heure du passage d'une étoile au méridien. Formule de Bessel.*

Épreuve pratique. — *Calculer la longueur* Q *du méridien terrestre supposé elliptique, connaissant l'excentricité* e *et la longueur* s *d'un arc mesuré entre les latitudes* λ *et* λ'.

Données numériques :

$s = 551583^{T},5.$ $\lambda = 51^\circ\ 2'\ 10'',5.$

$e^2 = 0,005979,$ $\lambda' = 41^\circ\ 21'\ 44'',8.$

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *On donne l'équation aux dérivées partielles*

$$z^2(2+p^2+q^2)-2pzx-2qzy-x^2-y^2=0$$

définissant des surfaces rapportées à trois axes rectangulaires :

1° *Démontrer que cette équation ne change pas si l'on fait tourner les axes autour de* Oz;

2° *Rechercher parmi les surfaces intégrales toutes celles qui sont de révolution autour de* Oz; *et aussi toutes celles qui sont de révolution autour d'une droite du plan* xOy;

3° *Intégrer complètement l'équation proposée, et donner sa solution singulière.*

Épreuve pratique. — *On considère la courbe d'intersection des deux surfaces*

$$z^2-bz-ax=0, \qquad z^4-2bz^3+a^2y^2=0,$$

et l'on demande :

1° *De construire ses projections sur les plans coordonnés;*

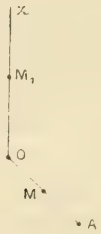
2° *De rectifier cette courbe.*

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Un tube rectiligne matériel homogène* OA, *de masse* p *et de longueur* a, *lié en* O *à un axe fixe vertical* Oz *auquel il reste perpendiculaire, peut tourner librement autour de cet axe. Deux points matériels* M *et* M_1, *de masse* m *et* m_1, *glissent sans frottement, le premier dans le tube, le second sur*

l'axe O*z*. *Ces points sont pesants et exercent de plus l'un sur l'autre des attractions mutuelles proportionnelles à la distance qui les sépare. On suppose à l'origine* M_1 *sans vitesse, le tube animé d'une vitesse*

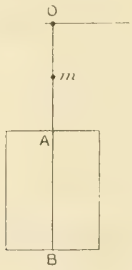
Fig. 1.



angulaire donnée ω *et* M *en repos relatif dans le tube. On demande le mouvement du système. Le tube est bouché en* O, *ouvert en* A. *Quand* M *s'éloigne de* O, *que faut-il pour qu'il ne sorte pas du tube? Mouvement ultérieur quand* M *peut quitter le tube.*

Épreuve pratique. — *Un cylindre homogène de révolution, de hauteur* h, *est supporté par une tige* OA

Fig. 2.



de même longueur h, *dont on néglige la masse et qui est le prolongement de son axe* AB. *Cette tige est liée en* O *à un axe horizontal autour duquel elle peut tourner.*

I. *Quel doit être le rayon du cylindre pour que le pendule simple synchrone ait la longueur* $2h$?

II. *Cette condition étant remplie, on ajoute une masse additionnelle* m *que l'on fait glisser le long de la tige entre* O *et* A, *et l'on demande d'étudier la variation de la longueur du pendule simple synchrone suivant la position de* m.

Poitiers.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *Trouver l'équation générale des surfaces représentées par l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(z^2 + x\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}\right) - \frac{\partial z}{\partial x}\,yx + yz = 0.$$

Mode de génération. Évaluer la surface particulière qui contient la droite $y = 0$, $z = 0$. *Évaluer le volume de chacune des deux nappes de cette surface.*

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$4xy'' + y' + 4y\sqrt{x} = x^{\frac{5}{4}}.$$

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Établir les formules qui déterminent l'anomalie excentrique, le rayon vecteur, l'anomalie vraie. — Calcul approché de l'anomalie excentrique.*

Épreuve pratique. — *Les coordonnées d'une étoile sont :*

Ascension droite.....	$0^h 3^m 50^s$
Déclinaison boréale.....	$58^\circ 35' 53''$

On a mesuré la hauteur et l'azimut et l'on a trouvé :

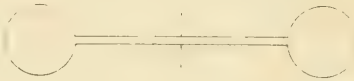
Hauteur	34°21′25″
Azimut compté du point sud vers l'ouest...	141°25′45″

Calculer l'angle horaire et la latitude. L'heure de l'observation est postérieure à $6^h 30^m$ *de temps sidéral.*

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Un point matériel mobile sur la surface engendrée par la révolution d'une hyperbole équilatère autour de son axe non transverse est soumis à l'action d'une force attractive perpendiculaire au plan du cercle de gorge et inversement proportionnelle au cube de sa distance à ce plan,* μ *étant l'intensité à l'unité de distance : il part d'une hauteur* h *au-dessus de ce plan avec une vitesse initiale* $v_0 = \frac{\sqrt{\mu}}{h}$ *tangente au parallèle. Étudier le mouvement. Calcul de la réaction.*

Épreuve pratique. — *Un corps de révolution se compose d'un tore et d'un disque circulaire dont la*



section circulaire moyenne se confond avec la section moyenne du tore. Le rayon du cercle générateur du tore égale $0^m,05$, *le rayon du disque* $0^m,25$ *et son épaisseur* $0^m,01$; *densité* 8. — *En supposant ce corps animé d'un mouvement de rotation autour de son axe dans lequel il fait* 1000 *tours par minute, on demande de calculer :* 1° *sa force vive;* 2° *le travail mécanique*

équivalent; 3° quelle quantité de chaleur correspondrait à l'anéantissement subit de cette force vive. (Équivalent mécanique de la chaleur, 425^{kgm}.)

ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES. CONCOURS DE 1900.

PREMIÈRE SESSION.

Géométrie analytique.

Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on prend sur l'axe Ox les points A, A′ dont les abscisses sont a et $6a$, puis, sur l'axe Oy, le point B d'ordonnée $3a$. On considère le faisceau des hyperboles équilatères circonscrites au triangle AA′B.

1° Former l'équation générale de ces coniques et en déduire que ces courbes ont un quatrième point commun.

Trouver le lieu des centres et tracer cette ligne.

2° Trouver le lieu du point M du plan pour lequel l'hyperbole équilatère MAA′B se réduit à deux droites.

3° Former l'équation du lieu S des points M du plan pour lesquels l'axe de l'une des paraboles MAA′B est également incliné sur les asymptotes de l'hyperbole équilatère circonscrite au même quadrilatère.

4° M étant un point d'abscisse $2a$ et d'ordonnée positive, sur le lieu S, construire les axes mêmes des paraboles MAA′B et les asymptotes de l'hyperbole équilatère passant par ces mêmes points.

5° Voir, par le calcul, si l'on peut déterminer un point M, sur le lieu S, par la condition que toutes les coniques circonscrites au quadrilatère MAA′B aient mêmes directions d'axes.

Épure.

Ombre d'une sphère sur un hémisphère.

On donne :

1° Une sphère C de rayon $r = 50^{mm}$.

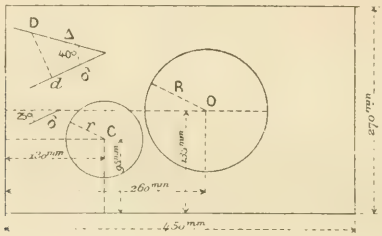
Projection du centre C à 130^{mm} du côté gauche du cadre et à 95^{mm} au-dessus du côté inférieur.

Cote du centre au-dessus du plan horizontal = 120^{mm}.

2° Un hémisphère reposant par sa base sur le plan horizontal, rayon R = 80^{mm}.

Centre O dans le plan horizontal à 260^{mm} du côté gauche du cadre et à 135^{mm} au-dessus du côté inférieur.

3° Une direction lumineuse. Cette direction faisant avec le



plan horizontal un angle de 40° et sa projection horizontale faisant avec le grand côté du cadre un angle de 25°, et l'on demande de déterminer en *projection horizontale :*

a. Les ombres propres de la sphère et de l'hémisphère éclairés par des rayons lumineux parallèles à la direction donnée;

b. L'ombre portée par la sphère sur l'hémisphère;

c. L'ombre portée par l'hémisphère sur le plan horizontal.

On aura soin de recouvrir de hachures noires régulièrement espacées les parties vues en projection horizontale, qui sont dans l'ombre.

Les courbes d'ombres propres ou portées seront déterminées par points.

On indiquera à l'encre rouge et pour chacune d'elles la construction d'une tangente.

Il sera tenu compte de la recherche des points et droites remarquables.

Cadre de 270^{mm} sur 450^{mm}.

Titre extérieur : *Géométrie descriptive.*

Titre intérieur : *Ombre d'une sphère sur un hémisphère.*

DEUXIÈME SESSION.

Géométrie analytique.

Les axes de coordonnées étant rectangulaires, on considère la conique C, qui a pour équation

$$y^2 - 2px = 0,$$

et un point P de son plan dont les coordonnées sont désignées par α, β.

1° Former l'équation de la ligne S qui limite la région du plan dans laquelle doit se trouver le point P, pour qu'il existe trois normales réelles et distinctes à la conique C issues de ce point P. Tracer la ligne S.

2° Trouver le lieu S′ du point P pour lequel l'une des normales PQ à la conique C passe par le milieu du segment intercepté sur l'axe Ox par les deux autres. Déduire graphiquement la ligne S′ du tracé de S.

3° Les pieds de ces deux dernières normales étant M et N, trouver le lieu V du pôle de la corde MN, quand le point P parcourt la ligne S′.

4° Le pied de la troisième normale étant Q, trouver le lieu du pôle de chacune des cordes QM, QN.

5° Quel est le nombre des points P tels que deux des normales à C, issues de ce point, soient rectangulaires, et que l'une d'elles passe par le milieu du segment intercepté sur Ox par les deux autres? Construction graphique de ces points.

Épure.

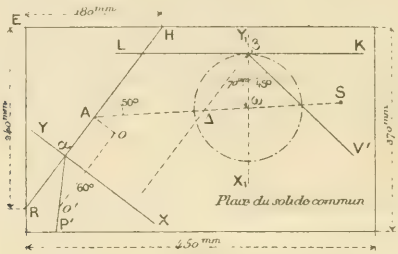
Intersection d'un cône et d'un cylindre.

On demande de déterminer la *projection horizontale* de l'intersection d'un cône et d'un cylindre, les surfaces étant définies de la manière suivante :

1° Le cône a sa base contenue dans un plan donné par sa trace horizontale RH (R sur le côté gauche du cadre à 240^{mm} du côté supérieur, H sur le côté supérieur à 180^{mm} du côté gauche) et son angle $= 60°$ avec le plan horizontal, de manière que le rabattement de la ligne de plus grande pente soit $\alpha P'$.

La base de ce cône est un cercle tangent en A au plan horizontal (A milieu de RH), son rayon est de 65^{mm}.

Le sommet du cône est le point S du plan horizontal (la



droite SA fait un angle de 50° avec RH), la longueur

$$AS = 350^{mm}.$$

2° Le cylindre a sa base contenue dans un plan donné par sa trace horizontale $L\beta K$ parallèle aux grands côtés du cadre et son angle $= 45°$ avec le plan horizontal. Cette base se projette horizontalement suivant un cercle $\omega\beta$ tangent en β à la droite LK; le rayon de ce cercle est de 70^{mm}. Les génératrices du cylindre sont horizontales et parallèles à la droite RH; celle qui passe par β rencontre la droite AS au point Δ tel que $A\Delta = 140^{mm}$.

On représentera le cône *opaque* en supprimant de cette surface la portion comprise dans le cylindre, cette dernière surface étant enlevée. On limitera le cône au plan de la base donnée.

On construira ensuite, à la place indiquée sur l'épure, la projection horizontale du solide commun au cône et au cylindre en admettant la transparence des surfaces qui limitent ce solide.

Les constructions nécessaires à l'obtention d'un point courant et de sa tangente, ainsi que celles exécutées pour la recherche des contours apparents ou des points et tangentes remarquables seront tracées à l'encre rouge.

Cadre de 270^{mm} sur 450^{mm}.

Titre extérieur : *Géométrie descriptive.*

Titre intérieur : *Cône entaillé par un cylindre.*

Reproduire sur l'épure les données numériques.

QUESTIONS.

1876. Pour quelles valeurs de x_1 et x_2, la somme

$$\frac{1}{x_1(n-1)+x_2}+\frac{1}{x_1(n-2)+2x_2}+\ldots+\frac{1}{x_1+(n-1)x_2}$$

a-t-elle une limite, quand n grandit indéfiniment?

Calculer cette limite. (E. Weill.)

1877. On donne un triangle CAB. Sur AB, AC comme demi-diamètres conjugués, on construit une ellipse (E); sur AB, BC on construit pareillement une seconde ellipse (E'). Etudier les intersections des deux ellipses (E), (E').

(C.-A. Laisant.)

1878. On considère une ellipse E et le cercle C concentrique à l'ellipse ayant pour diamètre la somme des axes de E. D'un point M quelconque de C on mène les tangentes à E dont les points de contact sont P et Q. Soit (Π) la parabole tangente en P et Q aux droites MP et MQ.

1° Le lieu du foyer des paraboles (Π) est l'ellipse E;

2° Les paraboles (Π) sont tangentes à la développée de l'ellipse E;

3° La directrice des paraboles (Π) enveloppe un cercle;

4° L'axe des paraboles (Π) enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. (E.-N. Barisien.)

1879. La tangente en un point M d'une conique à centre, coupe les axes en A et B, la normale au même point les rencontre en A' et B': soit m le centre de courbure du point M. Démontrer que

$$\frac{mA'}{mB'}=\frac{MA}{MB},$$

et déduire de cette propriété une construction simple du centre de courbure. (Droz-Farny.)

1880. Les intersections des plans principaux d'une quadrique avec la normale en un point M de cette quadrique déterminent trois régions sur cette normale. La région qui comprend le

point M ne contient aucun des centres de courbure principaux correspondant à ce point M. Pour un point P de cette région, PM est la plus courte distance du point P à la quadrique, si celle-ci n'est pas un ellipsoïde. Dans le cas de l'ellipsoïde, la région contenant le point M se compose de deux segments infinis; pour un point P situé dans le même segment que M, PM est la plus courte distance; pour un point P situé dans l'autre segment, PM est la plus grande distance. Pour les points P situés dans les autres régions de la normale, PM n'est ni la plus petite ni la plus grande des normales menées du point P à la quadrique. (A. Pellet.)

1881. Les pieds des quatre perpendiculaires abaissées du centre d'un hyperboloïde équilatère sur les faces d'un tétraèdre conjugué sont situés dans un même plan.

(A. Pellet.)

1882. Étant données deux paraboles focales l'une de l'autre dans l'espace, la surface réglée engendrée par une droite s'appuyant sur ces deux paraboles et parallèle à un plan passant par l'axe commun des paraboles est un conoïde droit.

(A. Pellet.)

1883. Par chaque point de l'espace on mène une perpendiculaire sur le plan polaire de ce point par rapport à une quadrique donnée. On a ainsi un complexe. Les droites du complexe situées dans un plan enveloppent une conique. Trouver le lieu des foyers de cette conique pour les plans parallèles à un plan donné. (A. Pellet.)

1884. Dans le plan, une courbe de troisième classe C et une cubique C′ pouvant se correspondre ainsi : l'un des trois systèmes de coniques S qui admettent C pour jacobienne tangentielle se compose des coniques inscrites à l'un des trois systèmes de quadrilatères inscrits à S′, et l'un des trois systèmes de coniques S′ qui admettent C′ pour jacobienne ordinaire se compose des coniques circonscrites à l'un des trois systèmes de quadrangles circonscrits à C. On peut se donner C′, par exemple, et il y a alors trois courbes C.

(G. Fontené.)

1885. Les hexaèdres complets conjugués à quatre quadriques dépendent de deux paramètres. Démontrer que les plans des

faces sont osculateurs à une cubique gauche Γ, et que, si t est un paramètre qui correspond uniformément aux plans osculateurs de la courbe, les six valeurs de t pour les divers hexaèdres sont données par une équation de la forme

$$f(t) + \lambda\varphi(t) + \mu\psi(t) = 0,$$

λ et μ variant. (G. FONTENÉ.)

1886. Si l'on inscrit dans une circonférence un quadrilatère quelconque $abcd$, et un rectangle $efgh$, dont les diagonales eg et fh sont perpendiculaires aux diagonales ac et bd du quadrilatère $abcd$, les quatre côtés de deux quadrilatères se coupent en seize points, qui sont, de quatre en quatre, sur des lignes droites I, J, K, L. La polaire du point d'intersection de deux quelconques de ces quatre droites par rapport à la circonférence passe par l'intersection des deux autres droites.

(L. KLUG.)

1887. Dans un tronc de cône de révolution, soient B le rayon de la grande base, b celui de la petite, et soit h la hauteur du tronc. Un plan mené tangentiellement à la petite base par le centre de la grande détache du tronc de cône un onglet. Si l'on désire connaître le volume de cet onglet, c'est-à-dire la formule de ce volume en fonction de B, b, h, et qu'à cet effet on décompose l'onglet en éléments par des plans parallèles aux deux bases du tronc de cône, on se trouve en présence d'une opération longue et pénible.

On propose de trouver une marche qui, par un très léger calcul, ramène tout à l'intégration d'une différentielle unique et de la forme $\sqrt{a + bx + cx^2}\,dx$. (CH. RUCHONNET.)

1888. Lorsqu'une transversale αβγ, à un triangle ABC, passe par le centre du cercle circonscrit à ce triangle, les trois cercles, ayant pour diamètres les diagonales du quadrilatère complet ACαγβB, se coupent en deux points qui sont situés, l'un sur le cercle circonscrit au triangle ABC, l'autre sur le cercle des neuf points relatifs au même triangle. (C. BLANC.)

1889. Lorsque deux triangles, l'un inscrit dans l'autre, sont involutifs, tout système de trois droites passant par les sommets du triangle circonscrit détermine, sur les côtés de l'inscrit, trois points qui forment six segments involutifs.

(C. BLANC.)

1890. Lorsque trois triangles sont homologiques deux à deux, si, dans le triangle formé par les trois axes d'homologie, un sommet est un centre d'homologie, chacun des deux autres sommets est aussi un centre d'homologie. (C. Blanc.)

1891. Dans un pentagone, les lignes menées par le milieu d'un côté et par le milieu de la droite qui joint les intersections des diagonales issues des extrémités de ce côté sont concourantes.

1892. Dans un pentagone, les cercles de neuf points, relatifs aux triangles formés par deux côtés consécutifs et une diagonale, se coupent, deux à deux, en 5 points qui sont sur un même cercle. (C. Blanc.)

1893. On donne une parabole P représentée par $y^2 - 2px = 0$; on considère les paraboles Q qui touchent OX en O et dont les directrices sont tangentes à P.

1° Former l'équation générale des paraboles Q, démontrer que par chaque point du plan il passe trois de ces paraboles, déterminer la région où sont situés les points tels que deux des trois paraboles qui y passent soient confondues;

2° Former l'équation de l'axe d'une parabole Q, en déduire qu'il passe trois axes par chaque point du plan, trouver le lieu des points tels que deux axes correspondants soient rectangulaires;

3° Trouver le lieu des foyers des paraboles Q;

4° Former l'enveloppe des tangentes aux sommets.

(Ch. Bioche.)

1894. On donne les trois surfaces du 2e degré

$$Q_1 = yz + a(z - y) + 3a^2 = 0,$$
$$Q_2 = zx + a(x - z) + 3a^2 = 0,$$
$$Q_3 = xy + a(y - x) + 3a^2 = 0:$$

1° Démontrer que ces surfaces passent par une même cubique gauche;

2° Trouver le lieu des centres des quadriques passant par cette cubique;

3° Trouver les droites situées sur ce lieu. (Ch. Bioche.)

1895. On considère l'hyperbole équilatère (H) ayant pour sommet les foyers d'une ellipse (E). D'un point quelconque P de cette hyperbole, on abaisse une des normales dont le pied

est en A. Du centre O de (E) on abaisse la perpendiculaire OS sur la tangente en A et OQ sur la normale en A. On obtient ainsi le rectangle OQAS. Montrer que le produit des aires des quatre rectangles analogues correspondant aux pieds des quatre normales est une quantité constante.

(E.-N. Barisien.)

1896. Étant données deux tangentes rectangulaires à l'ellipse dont les points de contact sont A et B, du centre O de l'ellipse on abaisse les perpendiculaires OS et OS′ sur les tangentes en A et en B, et les perpendiculaires OQ et OQ′ sur les normales en A et B. Quelle que soit la position des tangentes, on a

$$OS \times OQ = OS' \times OQ' = \text{constante}.$$

(E.-N. Barisien.)

1897. Si l'on considère toutes les hyperboles équilatères qui passent par deux points donnés et dont les asymptotes ont une direction fixe :

1° Le lieu des centres de ces hyperboles est une droite;

2° Le lieu des sommets se compose d'une ellipse et d'une hyperbole;

3° Le lieu des foyers se compose aussi d'une ellipse et d'une hyperbole concentriques. (E. Barisien.)

1898. Soient ABCD un quadrilatère; A′, B′, C′, D′ les centres des cercles inscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC respectivement; α, β, γ, δ les périmètres de ces triangles. Démontrer que le centre de gravité des poids α, β, γ, δ placés en A, B, C, D est le même que celui des mêmes poids placés en A′, B′, C′, D′ respectivement. (C.-A. Laisant.)

1899. On donne un point A et une droite D située à une distance d du point A. Une longueur $BC = \frac{2d}{\sqrt{3}}$ se déplace sur D. Montrer que la droite d'Euler du triangle ABC enveloppe une parabole. (E.-N. Barisien.)

1900. On considère deux points fixes A et B et un cercle décrit du milieu O de AB comme centre avec un rayon égal à $OA\sqrt{3}$. Montrer que pour un point C quelconque de ce cercle le triangle ABC jouit de cette propriété que l'axe radical de son cercle des neuf points est parallèle à la médiane OC.

(E.-N. Barisien.)

RECTIFICATION A UN ARTICLE DE M. LANDAU.

Les *Nouvelles Annales* ont publié dans le numéro d'août 1900 un important article de M. Landau : *Sur les conditions de divisibilité d'un produit de factorielles par un autre.* Par suite d'un malentendu, cet article a été inséré sans que l'auteur ait pu revoir les épreuves, alors qu'elles étaient censées avoir été revues. Il est résulté de ce fait un certain nombre d'erreurs que nos lecteurs sont priés de corriger d'après l'*errata* ci-après :

Pages	Lignes	Au lieu de	Lisez
349	16	$\left[\frac{u_\sigma}{\sigma}\right]$	$\left[\frac{u_\sigma}{P}\right]$
»	»	$\left[\frac{v_\sigma}{\sigma}\right]$	$\left[\frac{v_\sigma}{P}\right]$
350	12	$=$	$<$
351	4	diminuée	diminué
352	10	p	P
»	22	b	β
356	12	*effacer* $(i=1, 2, \ldots, r)$ et *ajouter* à la fin : tels que les différences $\left[\frac{y_i}{\eta_i}\right] - h_i$ aient la même valeur k, pour $i=1, 2, \ldots, r$.	
»	22 et 23	*mettre* une barre de fraction entre les deux lignes : $\frac{(\alpha_1^{(1)}x_1+\ldots+\alpha_r^{(1)}x_r)!\ldots(\alpha_1^{(m)}x_1+\ldots+\alpha_r^{(m)}x_r)!}{(\beta_1^{(1)}x_1+\ldots+\beta_r^{(1)}x_r)!\ldots(\beta_1^{(n)}x_1+\ldots+\beta_r^{(n)}x_r)!}$	
359	9	y	4
361	3	(11) et (12)	(10) et (11)
»	12	5, 1, 3, 0	5, 1, 0, 3
»	17	4, 1, 3, 0	4, 1, 0, 3
»	32	*effacer* $x!$	

ERRATA.

3e série, t. XIX, page 190, cinquième ligne, *au lieu de* $\frac{\pi}{n}$, *lisez* $\frac{\pi}{4}$.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME XIX, 3e SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

A. — Algèbre élémentaire; théorie des équations algébriques et transcendantes; groupes de Galois; fractions rationnelles; interpolation.

Pages.

A3a Théorème sur les équations algébriques; par M. *P. Sondat* 25

A4a Remarques sur la théorie des groupes finis; par M. *Michael Bauer* 59

A4a Note sur les groupes finis; par M. *Michael Bauer* .. 508

A4a Note sur les groupes finis d'ordre p^α, par M. *Michael Bauer* 509

B. — Déterminants; substitutions linéaires; élimination; théorie algébrique des formes; invariants et covariants; quaternions; équipollences et quantités complexes.

B1a Note sur les permutants; par M. *H. Bilenki* 213

B7b Sur les invariants de la forme biquadratique binaire; par M. *V. Jamet* 416

D. — Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires; séries et développements infinis, comprenant en particulier les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique; nombres de Bernoulli; fonctions sphériques et analogues.

D2aα Sur la Règle de Raabe ou Règle de Duhamel; par M. *G. de Longchamps* 216

Pages.

D3d Une application de la formule de Stokes; par M. *Vogt*..... 97

D5c Sur le principe de Dirichlet; par M. *D. Hilbert*.... 337

F. — Fonctions elliptiques avec leurs applications.

F2 Sur une nouvelle transcendante qui transforme l'intégrale elliptique de première espèce en une intégrale circulaire; par M. *E. Iaggi*..... 537

F4 Sur l'intégrale d'Euler et l'addition des fonctions elliptiques de première espèce; par M. *E. Iaggi*.. 443

F5eα Remarque sur l'inversion des intégrales elliptiques; par M. *J. Dolbnia*..... 390

F8f Exposition géométrique élémentaire de quelques propriétés fondamentales des fonctions elliptiques de première espèce; par M. *E.-M. Lémeray*... 255, 289

G. — Fonctions hyperelliptiques; abéliennes; fuchsiennes.

G2 Sur les substitutions uniformes et le problème de Babbage; par M. *E. Iaggi*..... 483

H. — Équations différentielles et aux différences partielles; équations fonctionnelles; équations aux différences finies; suites récurrentes.

H11d Exposition géométrique élémentaire de quelques propriétés fondamentales des fonctions elliptiques de première espèce; par M. *E.-M. Lémeray*.... 255, 289

I. — Arithmétique et théorie des nombres; analyse indéterminée; théorie arithmétique des formes et des fractions continues; division du cercle; nombres complexes, idéaux, transcendants.

I2e Sur les conditions de divisibilité d'un produit de factorielles par un autre, par M. *E. Landau*..... 344

Rectification à l'article précédent..... 576

K. — Géométrie et Trigonométrie élémentaires (étude des figures formées de droites, plans, cercles et sphères); Géométrie du point, de la droite, du plan, du cercle et de la sphère; Géométrie descriptive; perspective.

K1c Sur quelques nouveaux théorèmes relatifs au triangle; par M. *F. Caspary*..... 75

Pages.

K1c Pour la Géométrie récente; par M. *G. Candido*.... 544

K6b Sur les équations fondamentales de la théorie des surfaces, rapportées à deux trièdres birectangles mobiles; par M. l'abbé *Issaly*..... 49

K11 Deuxième concours des *Nouvelles Annales* pour 1899; par M. *G. Gallucci*..... 145

K11 Deuxième concours des *Nouvelles Annales* pour 1899; par M. *E. Duporcq*..... 193

K11e Concours de l'École des Ponts et Chaussées (1899): Géométrie analytique; solution géométrique; par M. *Allan Jerrold*..... 224

K13a Sur la simplification des formules d'angles et de distances en Géométrie de l'espace; par M. *L. Ripert*..... 409

L¹. — Coniques.

L¹5b Démonstration géométrique d'une propriété des normales à une conique à centre; par M. *A. Vacquant*..... 502

L¹17e Au sujet d'un théorème de M. G. Humbert; par M. *R. Bricard*..... 369

L¹18b Note pour servir à l'étude des faisceaux de coniques; par M. *J. Ser*..... 126

L². — Quadriques.

L²4c Sur le minimum de l'angle que fait un diamètre d'un ellipsoïde avec son plan diamétral conjugué; par M. *Blutel*..... 466

L²15e Premier concours des *Nouvelles Annales* pour 1900; par M. *A. Lagrange*..... 529

M¹. — Courbes planes algébriques.

M¹3 Remarques sur quelques théorèmes généraux de Géométrie métrique; par M. *Ch. Michel*..... 169

M¹3e Sur la symétrie de deux figures algébriques par rapport à un point; par M. *S. Mangeot*..... 451

M¹5cα Sur les cubiques strophoïdales; par M. *Lagrange*.. 66

M². — Surfaces algébriques.

M²2e Sur la symétrie de deux figures algébriques par rapport à un point; par M. *S. Mangeot*..... 451

Pages.

M²3hβ Formes réduites d'une relation triplement linéaire entre trois variables; par M. *G. Fontené* 494

M²4c Sur les surfaces du quatrième ordre qui ont deux droite doubles; par M. *G. Fontené* 400

M²4l Sur la surface de l'onde et la surface correspondante d'élasticité; par M. *E. Lacour* 362

M³. — Courbes gauches algébriques.

M³5 Sur une gerbe de cubiques gauches; par M. *Stuyvaert* 548

O. — Géométrie infinitésimale et Géométrie cinématique; applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes et des surfaces; quadrature et rectification; courbure; lignes asymptotiques, géodésiques; lignes de courbure; aires; volumes; surfaces minima; systèmes orthogonaux.

O2 Sur une classe de courbes planes remarquables; par M. *E. Cesàro* 489

O2b Problèmes divers sur la méthode inverse des tangentes; par M. *Ed. Collignon* 11

O2b Problèmes sur les normales aux courbes planes; courbes dans lesquelles la somme N + N′ est constante; par M. *Ed. Collignon* 433

O2q Sur les adjointes infinitésimales d'une courbe plane; par M. *M. d'Ocagne* 219

O4a Symétrie orthogonale par rapport à un cylindre quelconque; par M. *G. Pirondini* 107

O4b Sur l'hélicoïde général; par M. l'abbé *Issaly* 499

O5b Sur le développement de l'équation différentielle des lignes géodésiques d'une surface; par M. l'abbé *Issaly* 392

O5l Sur deux théorèmes de Géométrie différentielle; par M. *C. Lamioni* 557

P. — Transformations géométriques; homographie; homologie et affinité; corrélation et polaires réciproques; inversion; transformations birationnelles et autres.

P Sur la transformation, point par point, des courbes algébriques; par M. *V. Jamet* 506

P1a Note rectificative; par M. *P. Lefebvre* 177

Q. — Géométrie. Divers; Géométrie à n dimensions; Géométrie non euclidienne. Analysis situs; Géométrie de situation.

Pages.

Q1b Les séries dans la Pangéométrie; par M. *M. Efimov*. 58

Q2 Sur les développantes de certaines lignes en S_n et sur une propriété caractéristique des courbes hypersphériques à courbure constante; par M. *H. Piccioli*. 385

Q4b Carrés magiques supérieurs; par M. *G. Tarry*..... 176

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Compositions (session de juillet 1899) :

Besançon 225
Clermont 31
Grenoble 33
Lille 35
Marseille 37
Nancy 228
Poitiers 77
Rennes 78
Toulouse 81

Compositions (session de novembre 1899) :

Besançon 230
Caen 231
Clermont 232
Dijon 234
Grenoble 235
Lille 276
Lyon 278
Marseille 307
Montpellier 310
Nancy 314
Rennes 371
Toulouse 372

Compositions (session de juillet 1900) :

Caen 512
Grenoble 562
Marseille 560
Montpellier 560
Poitiers 565
Toulouse 564

Questions de concours.

Pages.

Résumé des principales formules de la théorie des fonctions elliptiques (concours d'agrégation) 2

Concours d'admission à l'École Normale supérieure en 1900; composition de Mathématiques 430

Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1900; composition de Mathématiques; épure 286

Concours général de 1900; Mathématiques spéciales..... 285

Agrégation des Sciences mathématiques; concours de 1900 427

Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1900; composition de Mathématiques; solution, par M. *Philbert du Plessis* 320

Agrégation des Sciences mathématiques; concours de 1899; solution de la question de Mathématiques spéciales, par M. *A. Vacquant*..... 130

Agrégation des Sciences mathématiques; concours de 1899; solution de la question de Mathématiques élémentaires, par M. *A. Vacquant* 179

Rectification (au sujet de l'article précédent); par M. *X. Antomari*..... 319

Agrégation des Sciences mathématiques; concours de 1899; solution du problème de Mécanique, par M. *A. de Saint-Germain*..... 468

Préparation à l'agrégation. Faculté des Sciences de Nancy; exercices..... 526

Correspondance.

M. G. Pirondini : A propos d'un article de M. H. Piccioli et sur les hélices cylindro-coniques 319

Bibliographie.

M. d'Ocagne : Traité de Nomographie; compte rendu par M. *Eug. Rouché*..... 85

M. Ivan Alexandroff : Problèmes de Géométrie élémentaire (traduction par *D. Aitoff*) 143

M. E. Cahen : Éléments de la Théorie des nombres; compte rendu par M. *R. Bricard*..... 476

Divers.

Deuxième concours des *Nouvelles Annales* pour 1899; résultat. 1

Deuxième concours des *Nouvelles Annales* pour 1900; sujet.... 241

Pages.
Deuxième concours des *Nouvelles Annales* pour 1900: errata. 337
Premier concours des *Nouvelles Annales* pour 1901: sujet..... 481
Premier concours des *Nouvelles Annales* pour 1900; résultat. 529
Réclamation à propos du théorème dit *de Rouché;* par M. *G. Fontené* 188
Avis important..... 480

Questions proposées.

482, 539, 558 (1) 382
573..... 188
583, 585, 589, 592, 593..... 189
596, 597..... 190
1833 48
1834 à 1837..... 95
1838 144
1839 à 1849 190
1850, 1851 239
1852 à 1854 288
1855 à 1866 (2)..... 382
1867 à 1873 (3)..... 431
1874, 1875..... 528
1876 à 1900..... 571

Solutions de questions proposées.

193, par M. *L. Ripert*..... 45
360, par *un abonné*..... 90
448, par *un abonné*..... 90
495, par *un abonné*..... 91
496, par M. *G. Fontené*..... 91
1788, par M. *V. Retali* 93
1789, par M. *A. Droz-Farny* 237
1791, par M. *A. Droz-Farny* 238
1792, par M. *A. Droz-Farny* 239

---

(1) C'est par erreur que ces trois questions, précédemment résolues, ont été réimprimées.

(2) La question imprimée sous le n° 1856 (p. 383) doit être numérotée 1856 *bis*.

(3) Ces questions, dans le Volume, ont été mal numérotées. Il importe au plus haut point de faire la rectification. *Voir* l'*Avis important* de la page 480.

Pages.
1793, 1794, par M. *L. Ripert* 335
1797, par M. *Audibert* 376
1798, par M. *A. Droz-Farny* 377
1800, par M. *V. Retali* 378
1801 379
1802, par M. *V. Retali* 380
1802, par M. *L. Ripert* 381

Errata et rectification 48, 144, 240, 480, 528, 576

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS

(TOME XIX, 3e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

Abel, 170, 256.
D. Aitoff, 143.
I. Alexandroff, 143.
Allix, 86.
Andoyer, 159.
D. André, 367.
X. ANTOMARI, 185, 319.
X. Antomari, 319.
Apollonius, 91, 164, 166, 167, 168, 505, 506.
Appell, 468.
ARCHIBALD, 383.
AUDIBERT, 376.
Babbage, 483, 487, 489.
Bachmann, 346.
Baltzer, 93.
E.-N. BARISIEN, 384, 432, 528, 571, 575.
E.-N. Barisien, 94, 237, 382.
M. BAUER, 59, 508, 509.
De Beaune, 11, 23.
Beghin, 88.
Bellencontre, 86.
Bernoulli, 489, 501.
Bessel, 562.
Bianchi, 557, 558.
H. BILENKI, 213.
CH. BIOCHE, 574.
C. BLANC, 190, 191, 573, 574.
BLUTEL, 466.
Bouquet, 38, 39.
Bour, 499.
Bourguet, 346, 348.
R. BRICARD, 288, 369, 480.
R. Bricard, 404, 407, 408.
Brill, 339.
Briot, 38, 39.
H. Brocard, 75, 77, 219, 245, 249, 253.
Brunel, 388.
E. Cahen, 476, 477, 479, 480.
G. CANDIDO, 244.
Cardon, 288.
Carnot, 171, 176, 471, 473, 526.
F. CASPARY, 75.
Catalan, 345, 361.
A. Cazamian, 239, 378.
E. CESÀRO, 489.
Chasles, 147, 168, 169, 176, 417, 556.
Ciamberlini, 169.
Clebsch, 443.
ED. COLLIGNON, 11, 433.
Ed. Collignon, 220.

Comberousse, 366.
Côtes, 171, 176.
Cremona, 548.
G. Darboux, 443.
Dedekind, 345.
Desboves, 91.
Dirichlet, 313, 337, 338, 339, 340, 345, 479.
J. Dolbnia, 390.
A. Droz-Farny, 237, 238, 239, 240, 571.
A. Droz-Farny, 95, 380.
Duhamel, 216.
Dulimbert, 379.
M. Dunesme, 189, 190.
E. Duporcq, 193, 384, 431, 432.
E. Duporcq, 1, 90, 502, 505.
M. Efimov, 28.
Euler, 92, 93, 238, 443, 447, 448, 449, 473, 478, 575.
Farcot, 36.
Faure, 189, 190.
Faure, 151.
Faye, 43.
Fermat, 478.
Ferrari, 245, 247, 419, 420.
G. Fontené, 92, 188, 384, 400, 432, 494, 572, 873.
G. Fontené, 188, 379.
Fouché, 167, 169.
J. Franel, 48, 96.
Fregier, 151, 152.
Fresnel, 367.
Frobenius, 59, 63, 65, 510.
G. Gallucci, 96, 145.
G. Gallucci, 1, 238.
Gauss, 85, 337.
E. Genty, 144.
Gergonne, 146, 152, 167, 168, 213, 251.
Gerono, 188.
Goedseels, 88.
Grassmann, 169.
Halphen, 318, 390.
Hartmann, 468.
Heinrichs, 549, 556.
Hesse, 72, 157, 165.
D. Hilbert, 337.
Hosfeld, 169.
G. Humbert, 169, 171, 172, 173, 175, 369, 370, 401.
E. Iaggi, 443, 483, 537.
E. Iaggi, 302, 303, 483.
Issaly, 49, 392, 499.
Jacobi, 6, 7, 478.
V. Jamet, 419, 506.
Allan Jerrold, 224.
Joachimsthal, 382.
E. de Jonquières, 189.
Kepler, 88.
Kiepert, 288.
F. Klein, 479.
L. Klug, 573.
Kœhler, 382.
Kœnigs, 90, 548.
Kronecker, 97, 104.
E. Lacour, 361.
Lagrange, 29, 93, 471, 474, 499.
A. Lagrange (Brest), 66, 529.
A. Lagrange, 529.
Laguerre, 169, 171, 172, 176.
C.-A. Laisant, 383, 571, 575.
C.-A. Laisant, 221.
Lalanne, 86, 87.
Lallemand, 86, 87, 89.
Lamé, 56.
C. Lamioni, 557.
E. Landau, 344.
Landen, 391, 392.
L. Laugel, 337, 344.
Laurent, 82.
H. Laurent, 188, 376.
Leau, 483.
Lecornu, 90.
P. Lefebvre, 177.
Legendre, 230, 476, 478.
Leibniz, 80.
E.-M. Lémeray, 96, 190, 255, 289.

E.-M. Lémeray, 483.
E. Lemoine, 383.
E. Lemoine, 75, 77, 94, 167, 245, 247, 253, 335, 383.
H. Lez, 95.
Liouville, 169, 171, 175, 479.
Lobatchefsky, 28.
G. de Longchamps, 216.
G. de Longchamps, 247.
G. Loria, 169.
Lugli, 247.
J.-S. Mackay, 288.
Malfatti, 168.
S. Mangeot, 451.
Mannheim, 190, 382.
Mannheim, 167, 368, 377.
Massau, 86, 87, 90.
Mehmke, 89, 169.
Merlin, 336, 380.
Meyer, 277.
Ch. Michel, 169.
Miquel, 155.
Möbius, 155.
Monge, 499.
Moutard, 92.
Müller, 169.
J. Neuberg, 75, 288, 502.
C. Neumann, 339.
Niewenglowski, 420.
Nöther, 339.
Obenheim, 86.
M. d'Ocagne, 192, 219.
M. d'Ocagne, 85, 86, 87, 88, 89, 334, 498.
Paladini, 89.
A. Pellet, 191, 572.
J. Petersen, 143.
E. Picard, 97, 98, 104, 337, 338.
H. Piccioli, 383, 385.
H. Piccioli, 319.
Piobert, 86.
G. Pirondini, 107, 319.
Philbert de Plessis, 320.
Plücker, 415, 416, 417.
H. Poincaré, 313, 339.
Poinsot, 515.
Poncelet, 168, 171, 213.
Pouchet, 86, 87.
Poulain, 89.
Prévot, 89.
Pythagore, 29.
Raabe, 216.
Rateau, 88.
V. Retali, 94, 378, 380, 432.
Reuleaux, 89.
Reye, 155, 548.
Ribaucour, 490, 494.
Riemann, 338.
L. Ripert, 45, 288, 335, 381, 409, 431.
Rœsch, 139.
E. Rouché, 90.
E. Rouché, 188, 366.
Ch. Ruchonnet, 573.
de Saint-Robert, 90.
A. de Saint-Germain, 468.
Salmon, 91, 92, 405.
Scherk, 502.
H.-A. Schwarz, 339.
J. Ser, 126.
J.-A. Serret, 476.
P. Serret, 156.
Simson, 377, 378.
P. Sondat, 25, 191, 384.
von Staudt, 548.
Steiner, 168, 381, 497.
C. Stephanos, 155.
Stokes, 99.
R. Sturm, 548, 556.
Stuyvaert, 548.
Sylow, 65, 66.
Sylvester, 92.
Tait, 368.
G. Tarry, 176.
Taylor, 372.
Tchebychef, 480.
Terquem, 245, 251, 252.
C. Thiry, 247.
Thomæ, 168.
A. Vacquant, 130, 179, 502.

A. Vacquant, 319.
Vaes, 89.
Veronese, 155.
Vète, 167.
Vogt, 97.
Weierstrass, 2, 35, 255, 315, 338, 339.
E. Weill, 528, 571.
Wilson, 478.
Witt, 229.
Zeuner, 277.
Zeuthen, 506.
Zsigmondy, 509.

28050 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
N8
v.59

Nouvelles annales
de mathématiques

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY